Seminario Rubio de Francia

Conferencia

por

Santiago Montaner

Université Clermont-Auvergne

Título:

Controlabilidad de la ecuación de ondas: formulación mixta de primer orden y discretización mediante elementos finitos

Resumen: En este seminario se presentará un método basado en técnicas de optimización para obtener aproximaciones numéricas del control de norma L^2 mínima para la ecuación de ondas cuando el control actúa sobre un subconjunto abierto $\mathcal{J} \subseteq \partial\Omega$, siendo $Q_T = \Omega \times (0,T)$ el dominio espacio-temporal donde tiene lugar la evolución del sistema controlado.

Un método clásico para obtener la existencia de controles de norma L^2 mínima soportados en un abierto $\mathcal{J} \subseteq \partial\Omega$ y tales que conducen un cierto dato inicial $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ —posición y velocidad inicial— al estado de reposo en un sistema gobernado por la ecuación de ondas, consiste en buscar v como $v = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}|_{\mathcal{J}}$, donde φ es una solución del problema dual

$$\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi = 0, \quad \varphi = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0,T), \quad (\varphi(0), \varphi_t(0)) = (\varphi^1, \varphi^2), \tag{1}$$

tal que (φ_1, φ_2) resuelve el problema de optimización

$$\min_{(\varphi_1,\varphi_2)\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \frac{1}{2}\int_{\mathcal{J}} |\tfrac{\partial\varphi}{\partial\nu}|^2 \, d\sigma \, dt + (u_0, \varphi_1)_{L^2(\Omega)} - \langle u_1, \varphi_0\rangle_{H^1,H^{-1}} \tag{2}$$

El problema (2) es un problema de minimización condicionado con una ligadura definida por (1). Para tratar este problema, en el trabajo [1] se utiliza una formulación variacional *mixta* junto con un multiplicador de Lagrange. Dicha formulación mixta admite una discretización mediante elementos finitos, que presenta buenas propiedades de aproximación en experimentos numéricos.

Inspirados por el trabajo [1], hemos introducido una formulación mixta de primer orden. Esta formulación se basa en la siguiente observación: si φ es una solución de la ecuación $\varphi_{tt} - \Delta\varphi = 0$, entonces la nueva variable $(v,p) := (\varphi_t, \nabla\varphi)$ es solución del del sistema de primer orden

$$v_t - div\, p = 0, \quad p_t - \nabla v = 0. \tag{3}$$

La principal ventaja de trabajar con la nuevas variables (v,p) es que permite introducir una discretización en espacios de elementos finitos menos regulares. Por otra parte, en otros problemas hiperbólicos como la ecuación de la elasticidad lineal, la introducción de nuevas variables análogas a (v,p) es interesante porque representan cantidades físicas relevantes como el tensor de tensiones.

Referencias

[1] N. Cîndea, A. Münch, *A mixed formulation for the direct approximation of the control of minimal L^2-norm for linear type wave eaquations*, *Calcolo* **52** (2015), no. 3, 245–288.

Fecha: jueves, 8 de marzo de 2018.
Hora: 12:00 horas.
Lugar: seminario Rubio de Francia, edificio de Matemáticas, primera planta.
Web: `http://www.unizar.es/analisis_matematico/seminario.html`