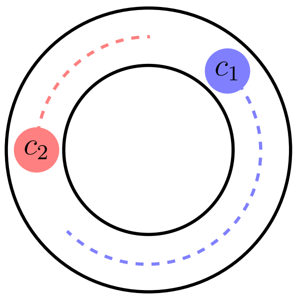
Los problemas de Matemañicos

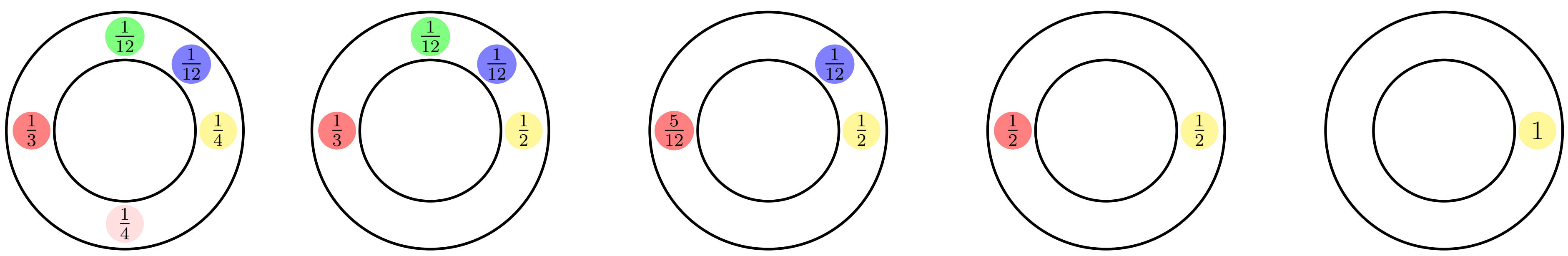
Solución

A primera vista, parece que existen demasiadas posibilidades para organizar el problema: podemos poner n coches, cada uno en una posición distinta con una cantidad de combustible cualquiera siempre y cuando entre todos ellos sumen el total necesario para dar una vuelta... ¡es un jaleo! Así pues, comencemos por un caso muy sencillo: supongamos que solo ponen un coche; necesariamente, este coche tiene la cantidad de combustible suficiente para dar la vuelta por sí mismo.



Pensemos ahora en el caso de dos coches cuyos depósitos les permiten recorrer las fracciones c_1 y c_2 del circuito. Es decir, si $c_1 = \frac{1}{3}$, el coche azul puede recorrer un tercio del circuito. Si cualquiera de los dos coches es capaz de alcanzar al otro, está claro que será capaz de dar la vuelta. Pero, ¿podría darse el caso de que ninguno de los dos coches pueda alcanzar al otro? Esa es la situación dibujada en la izquierda; ahí podemos ver el recorrido que sería capaz de hacer cada coche representado por las líneas discontinuas. Evidentemente, en este escenario, $c_1 + c_2 < 1$, lo cual contradice la premisa de que si sumásemos todos los combustibles, sería suficiente para dar una vuelta. En definitiva, con dos coches también sabemos que siempre habrá solución.

Finalmente, vamos con todo: supongamos que siempre hay solución para n coches y veamos qué ocurre cuando introducimos uno más. Por el mismo argumento de antes, alguno de los vehículos debe tener la capacidad de alcanzar al siguiente; si esto no ocurriese, se daría la contradicción $c_1 + c_2 + \cdots + c_{n+1} < 1$. Digamos que es el i-ésimo coche el que alcanza al $(i+1)$-ésimo[1]. Para un piloto, una vez empezada la prueba, hubiera sido lo mismo encontrarse el coche i-ésimo y, por consiguiente, alcanzar después el $(i+1)$-ésimo que encontrarse el coche i-ésimo con $c_i + c_{i+1}$ de combustible y después el coche $(i+1)$-ésimo sin combustible. Esto significa que una vez sabemos que el coche i-ésimo alcanza al $(i+1)$-ésimo, podemos hacer como si solo tuviésemos n coches y el $(i+1)$-ésimo no existiera. Por un argumento de inducción, llegamos a que el problema siempre tiene solución, independientemente de cuántos coches haya y cómo estén distribuidos.



Situación inicial. | El coche amarillo alcanzará al rosa. | El coche rojo alcanzará al verde. | El coche rojo alcanzará al azul. | El coche amarillo alcanzará al rojo.

Una ilustración de cómo funciona este argumento de inducción es la resolución del caso de arriba. El paso de inducción nos garantiza que siempre va a haber un coche que alcance a otro y que nos permita «reducir» el número de coches. De hecho, el método que se muestra nos da una solución al problema: escoger el coche amarillo.

Sobre este problema: Aparece como problema 2 de la sección *8. The Induction Principle* del libro *Problem Solving Strategies*, de Arthur Engel.

¿Te gustaría participar en Matemañicos? ¿Tienes alguna pregunta sobre el problema? Visita nuestras redes `@matemanicos` y `@matemanicos` o envíanos un correo a `matemanicos@unizar.es`.

[1] En caso de ser el coche $(n+1)$-ésimo el que alcanza al primero, podríamos renombrar los coches para que esta notación fuese válida.