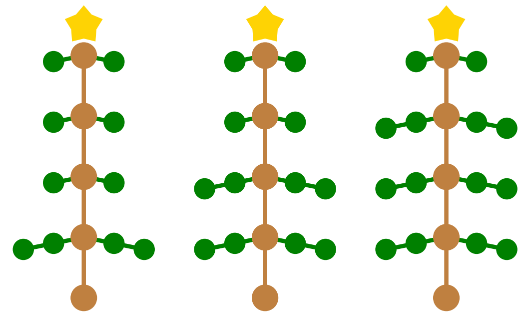
Los problemas de Matemañicos

Solución

Contando árboles de Navidad: Pensemos primero cuántos valores diferentes pueden tomar las longitudes de las ramas. Puede que sea uno solo, y tendremos un árbol que será recto. Para esto existen $A-1$ posibilidades, ya que la longitud de las ramas puede ser 1, 2, hasta $A-1$. Nótese que $A-1=\binom{A-1}{1}$. Si las ramas solo pueden ser de dos longitudes, entonces hay $\binom{A-1}{2}$ posibilidades para estas. En este caso, tendremos un árbol que baja recto, tiene un escalón entre dos ramas y sigue bajando recto; y ese escalón estará entre uno de los $A-2$ pares de ramas contiguas. Nótese aquí también que $A-2=\binom{A-2}{1}$. Por lo tanto, el número de árboles con ramas de solo dos longitudes es $\binom{A-2}{1}\binom{A-1}{2}$. Extender esto a tres ramas es muy sencillo: habrá que contar los tríos de longitudes posibles, $\binom{A-1}{3}$, y también las posibles localizaciones de los dos saltos, $\binom{A-2}{2}$, obteniendo $\binom{A-2}{2}\binom{A-1}{3}$. Esto puede generalizarse para k posibles longitudes, quedándonos $\binom{A-2}{k-1}\binom{A-1}{k}$ árboles con ramas de k longitudes distintas. El resultado que buscamos no es más que sumar todas las posibilidades, es decir:

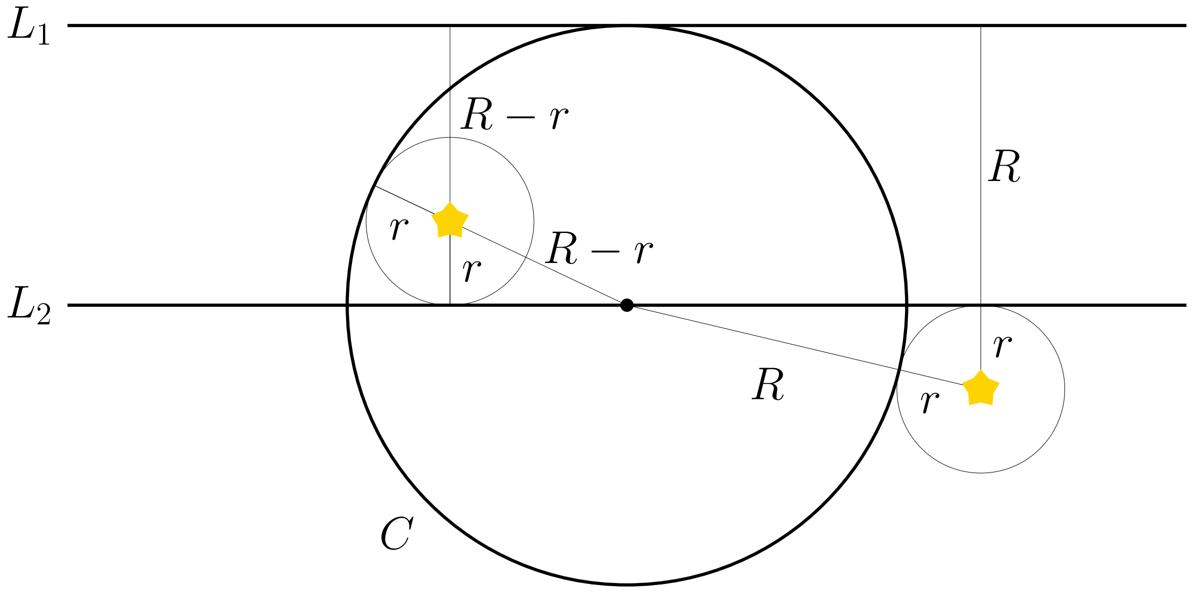


Para un árbol con $A=5$ con solo dos longitudes de rama, 1 y 2, hay $\binom{5-2}{2-1}=\binom{3}{1}=3$ posibles configuraciones.

$$\sum_{k=1}^{A-1}\binom{A-2}{k-1}\binom{A-1}{k}.$$

Veamos el número de posibles árboles de Navidad para los primeros valores de A:

A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n° posibles árboles	1	3	10	35	126	462	1716	6435	24310	92378	352716	1352078



La trayectoria de la Estrella Fugaz: Es suficiente con darse cuenta de que las distancias del centro del círculo a la estrella y de la estrella a L_1 coinciden. En el caso de las estrellas interiores al círculo C , estas distancias son $R-r$; y en el de las exteriores, $R+r$, donde r representa la distancia de la estrella a L_2. Por lo tanto, la trayectoria es el lugar geométrico de puntos equidistantes a una recta y un punto exterior a esta; es decir, es una parábola.

Sobre estos problemas: El primer problema proviene del artículo *Counting Christmas Trees* escrito por Tiffany N. Kolba y Jonathan Beagley de la revista *The College Mathematics Journal*, volumen 52, fascículo 5. El segundo proviene del artículo *Proof Without Words: A Property of Tangent Circles* escrito por Michael N. Fried en la misma revista, en este caso el volumen 55, fascículo 4.

¿Te gustaría participar en Matemañicos? ¿Tienes alguna pregunta sobre el problema? ¿Quieres más Matemáticas curiosas? Visita todo lo que ofrecemos en el QR de la derecha.