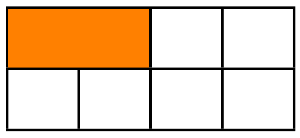
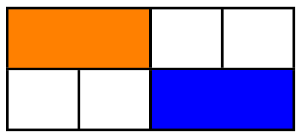
Los problemas de Matemañicos

Solución

Supongamos n y m pares. La estrategia es sencilla: reflejamos el último movimiento del primer jugador con respecto al centro. Con las casillas numeradas como las entradas de una matriz, si el primer jugador ha ocupado en su k-ésimo turno las casillas dadas por $(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$, con $\mathbf{a}_k$ y $\mathbf{b}_k$ en el conjunto $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces el segundo jugador debe colocar una ficha sobre las casillas $(m+1, n+1) - \mathbf{a}_k$ y $(m+1, n+1) - \mathbf{b}_k$.



Empieza el primer jugador.

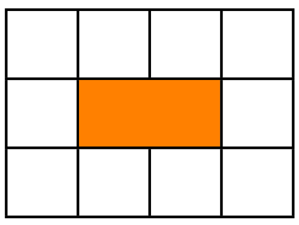


El segundo hace el movimiento simétrico.

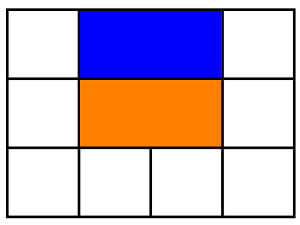
Por ejemplo, en la partida de la derecha, el primer jugador empieza con $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = ((1,1), (1,2))$ a lo cual el segundo jugador debe jugar $((2,4), (2,3))$. Asumamos ahora que es el k-ésimo turno del primer jugador y, hasta ahora, hemos estado jugando según la estrategia explicada. Tras colocar su ficha en $(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k)$, el segundo jugador intentará poner su ficha en la simétrica; si puede, continuaremos al $(k+1)$-ésimo turno del primer jugador; si no puede, hay dos opciones: que alguna de las casillas que quiere ocupar ya esté ocupada por una ficha del primer jugador o del segundo. Nótese que, al ser n y m pares, las fichas simétricas no se solapan entre ellas. Si la casilla ocupada es del primer jugador, eso quiere decir que en el turno en el que el primer jugador ocupó dicha casilla, el segundo jugador ocupó la simétrica; pero la casilla simétrica es la que acaba de ocupar el primer jugador; contradicción. Si por el contrario la casilla está ocupada por el segundo jugador, eso quiere decir que la ocupó haciendo el movimiento simétrico a uno anterior del primer jugador, pero eso querría decir que en este movimiento, el primer jugador ha ocupado una casilla que ya había ocupado antes; contradicción.

Acabamos de demostrar que después de cada movimiento del primer jugador, el segundo siempre puede hacer otro. Esto prueba que el segundo jugador nunca se queda sin movimientos y, como el juego es finito, el primer jugador perderá necesariamente.

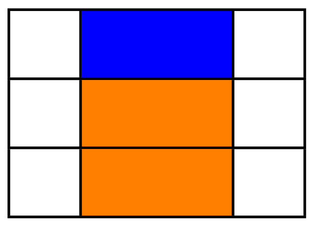
En el caso de n impar, perdemos la condición de que las fichas simétricas no se solapen, lo cual invalida el argumento anterior. Ahora bien, obsérvese que la única ficha que se solapa con su simétrica es $\left(\left(\frac{m}{2}, \frac{n+1}{2}\right), \left(\frac{m}{2}+1, \frac{n+1}{2}\right)\right)$. Así, la estrategia ganadora, en este caso para el primer jugador, es colocar su primera ficha ahí. De esta forma, el segundo jugador se encuentra un panorama similar al del primer jugador en el caso anterior: todos sus movimientos tienen simétrico, y por lo tanto el primer jugador puede utilizar la estrategia de segundo jugador explicada antes. Un ejemplo de esto es el siguiente:



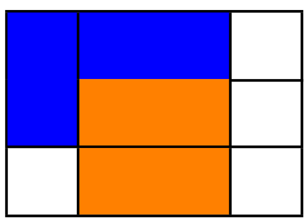
Empieza ocupando la única ficha que se solapa con su simétrica.

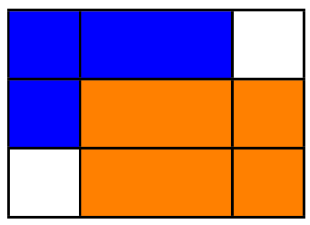


El segundo jugador está en las mismas que empezando el caso par.



El segundo jugador refleja los movimientos.





Sobre este problema: El juego mostrado se conoce por el nombre de *Cram*. Es un ejemplo clásico de juego combinatorio en la Teoría de Juegos. Una variante muy conocida también es *Domineering*.

¿Te gustaría participar en Matemañicos? ¿Tienes alguna pregunta sobre el problema? Visita nuestras redes `@matemanicos` y `@matemanicos` o envíanos un correo a `matemanicos@unizar.es`.