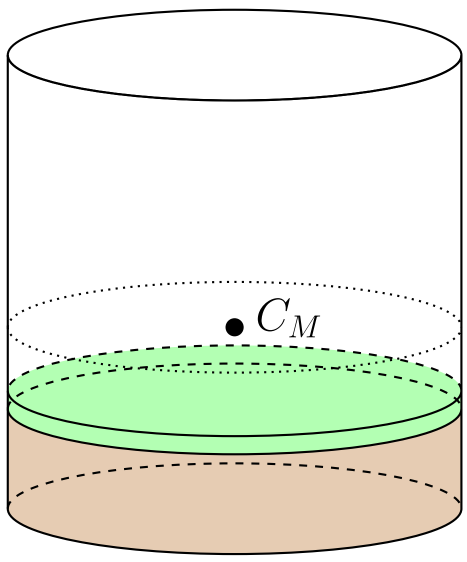
Los problemas de Matemañicos

Solución

La solución comienza de la misma forma que si fuésemos a utilizar derivadas: calculando la expresión de la altura del centro de masas, C_M, en función de la altura del líquido vertido, a. Tomando A como la altura total de la lata, R como el radio de su base, m_{lata} y $m_{\text{líquido}}$ como las masas de la lata y el líquido, respectivamente, y ρ como la densidad del líquido tenemos que

$$C_M(a) = \frac{\frac{A}{2}m_{\text{lata}} + \frac{a}{2}m_{\text{líquido}}}{m_{\text{lata}} + m_{\text{líquido}}} = \frac{1}{2}\frac{Am_{\text{lata}} + \rho\pi R^2 a^2}{m_{\text{lata}} + \rho\pi R^2 a}.$$

Aquí es cuando normalmente derivaríamos con respecto a a e igualaríamos a 0. Pero en este caso podemos razonar de forma que podamos ahorrarnos la derivada. Pensemos en la relación entre la altura del centro de masas y el nivel del líquido cuando nos encontramos en el mínimo buscado.

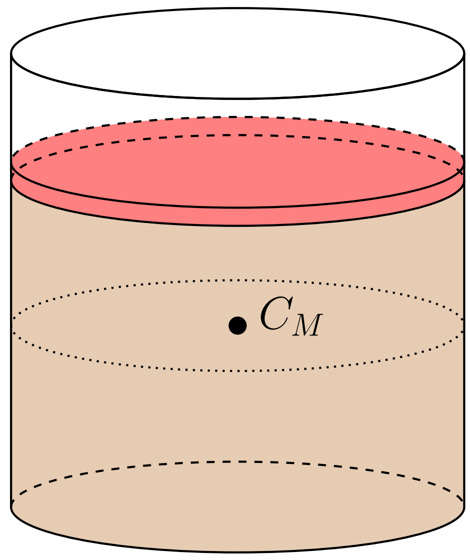


Si la altura mínima del centro de masas estuviera por encima del nivel del líquido correspondiente, podríamos proceder como en la figura de la izquierda e incrementar el líquido un «poquico» de forma que aun con el incremento, el nivel de este siguiera estando por debajo del centro de masas. De esta forma, la masa del sistema por encima del centro de masas hubiera quedado igual, mientras que por debajo hubiese aumentado, haciendo que el centro de masas bajase; esto es una contradicción, pues la altura del centro de masas ya se suponía mínima.

Por otro lado, si el nivel estuviese por encima del centro de masas, podríamos hacer lo contrario y quitar otro «poquico» de líquido de forma que el restante siguiese estando por encima del centro de masas. Ahora es la masa por debajo del centro de masas la que queda igual y aquella por encima la que se reduce y, por lo tanto, la altura del centro de masas disminuiría. De nuevo, contradicción.

Con este razonamiento hemos demostrado dos cosas: que existe un único mínimo global y que este se da cuando $C_M(a) = a$. Resolvemos pues la ecuación de segundo grado que aparece y obtenemos

$$\frac{\sqrt{\rho\pi R^2 A m_{\text{lata}} + m_{\text{lata}}^2} - m_{\text{lata}}}{\rho\pi R^2} = a_{\text{mín}} = C_M(a_{\text{mín}})\,.$$



Démonos cuenta de que este procedimiento es muy general y puede aplicarse para cualquier tipo de vaso, independientemente de la forma que tenga. En tal caso, nos basta con encontrar el punto fijo de C_M para minimizar su altura.

Sobre este problema: Fue planteado y resuelto originalmente por Walter B. Roberts, de la Universidad de Princeton, durante una salida al campo. El Ron-Cola, realmente originado en la guerra entre Estados Unidos y España durante la guerra de independencia de Cuba —de ahí el nombre «cubata»—, no se encuentra entre las muchas aportaciones de Zoel García de Galdeano, que sí podéis ver en los pósters del departamento de Matemática Aplicada.

¿Te gustan las Matemáticas y querrías participar en Matemañicos? ¿Tienes alguna pregunta sobre el problema? Visita nuestro Instagram `@matemanicos` o envíanos un correo a `matemanicos@unizar.es`.