Edificio de Matemáticas (B)
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza
Calle Pedro Cerbuna 12,
50009, Zaragoza, Zaragoza
matemanicos@unizar.es

Asociación Matemañicos

# P.A.U. Aragón 2026: Modelo Orientativo[1] Matemáticas II

**Advertencia:** La Asociación Matemañicos no se compromete a que los procedimientos, razonamientos ni resultados en este documentos sean válidos para la P.A.U. en Aragón el año 2026. Este es simplemente un material que ponemos a la disposición de todo aquel interesado, el cual no pretende —ni debe— sustituir la labor de un docente cualificado.

Más claro: hemos escrito este documento con nuestra mejor intención, lo hemos revisado numerosas veces para que no haya ningún error y hemos intentado utilizar herramientas y procedimientos al nivel esperado en estas pruebas. Pero ello no impide que pueda haber fallos o un uso de herramientas demasiado avanzadas. Por favor, no tengáis una fe ciega en lo que veáis en este documento y atended a las instrucciones y consejos de vuestros profesores.

## ¿Te gusta lo que hacemos? ¡Aquí tienes enlaces de interés!

(Puedes clicar sobre los QR —y todos los enlaces en azul o rojo— si estás viendo esto en digital)

@matemanicos

@matemanicos

@MatemañicosUnizar

Nuestra página web. Donde podrás encontrar más de nuestros documentos.

[1]No es el examen que aparecerá en las pruebas oficiales, sino el modelo orientativo oficial publicado para ilustrar el formato del examen. El documento publicado del que hemos sacado los enunciados puede encontrarse aquí.

# Índice

# Pregunta 1: Probabilidad y Estadística (2 puntos)

*La caída de los tipos de interés en el segundo semestre de 2024 permitió a las familias ahorrar alrededor de* 200 *euros al mes en comparación con lo que venían pagando por sus hipotecas y préstamos. Este ahorro equivalía a más de* 2000 *euros anuales. Ante este escenario, los bancos ofrecieron condiciones más atractivas para captar clientes, lo que generó una fuerte competencia entre las entidades. Una de ellas lanzó los siguientes productos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto y Préstamo Estudia. Cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos.*

*La política de la empresa determinó que el reparto final de los préstamos concedidos fuera el siguiente: un* 45 % *correspondió a Préstamos 24 Horas, un* 40 % *a Préstamos Auto y un* 15 % *a Préstamos Estudia. Además, se analizó el porcentaje de impago en estos productos, que fue del* 20 % *en Préstamos 24 Horas, del* 30 % *en Préstamos Auto y del* 25 % *en Préstamos Estudia.*

*Basándote en el contexto anterior, responde estos cuatro apartados:*

### 1.1 (0.5 puntos) *Seleccionado un préstamo al azar, calcula la probabilidad de que no se haya pagado.*

Antes de nada, definamos algunas variables para poder expresarnos con claridad. La primera será la variable $T$ que representará el tipo de préstamo. Así, si $T = 24\,\text{Horas}$, el préstamo es del tipo 24 Horas; y así con los tres tipos posibles. Por otro lado, la variable $P$ —¡ojo!, no confundir con $\mathbf{P}$, que representa la probabilidad y no va en cursiva sino en negrita— representará si el préstamo ha sido pagado, $P = \text{Sí}$, o no lo ha sido, $P = \text{No}$.

Con esta notación, los datos que nos dan en el enunciado con respecto a la probabilidad de los tipos de préstamos pueden escribirse así:

$$\mathbf{P}(T = 24 \text{ Horas}) = 45\,\% = \frac{9}{20}, \quad \mathbf{P}(T = \text{Auto}) = 40\,\% = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(T = \text{Estudia}) = 15\,\% = \frac{3}{20};$$

y, para las tasas de impago,

$$\mathbf{P}(P = \text{No} \mid T = 24 \text{ Horas}) = 20\,\% = \frac{1}{5}, \quad \mathbf{P}(P = \text{No} \mid T = \text{Auto}) = 30\,\% = \frac{3}{10}$$
$$\text{y} \quad \mathbf{P}(P = \text{No} \mid T = \text{Estudia}) = 25\,\% = \frac{1}{4}.$$

Todo esto lo podemos representar como un árbol de probabilidades, el cual mostramos en la figura 1:

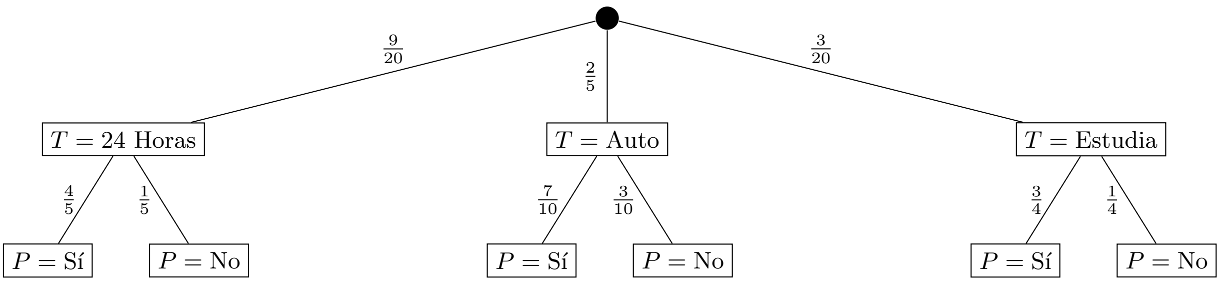



Figura 1: Árbol de probabilidades de pago y de tipo de préstamo.

El enunciado nos pregunta por $\mathbf{P}(P = \text{No})$. Para poder responder, deberemos aplicar el teorema de la probabilidad total, que en para este caso lo que nos viene a decir es que la probabilidad de que no se haya pagado un préstamo cualquiera es la suma de las probabilidades de que no se haya pagado un préstamo del tipo 24 Horas más la de que no se haya pagado un préstamo del tipo Auto más la de que no se haya pagado un préstamo del tipo Estudia. Este resultado lo podemos aplicar porque las condiciones «ser de tipo 24 Horas», «ser de tipo Auto» y «ser de tipo Estudia» son mutuamente excluyentes, es decir, no se puede dar más de una en simultáneo. Así pues,

$$\mathbf{P}(P = \text{No}) = \mathbf{P}(P = \text{No y } T = 24 \text{ Horas}) + \mathbf{P}(P = \text{No y } T = \text{Auto}) + \mathbf{P}(P = \text{No y } T = \text{Estudia})$$

Aunque no conozcamos estas probabilidades, podemos utilizar la descomposición $\mathbf{P}(A \text{ y } B) = \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B)$ para así obtener expresiones que sí nos vengan dadas por el enunciado. Recordemos que esta expresión simplemente nos dice que la probabilidad de que ocurran $A$ y $B$ simultáneamente es la misma que la de que ocurra $B$ por la probaiblidad de que ocurra $A$ asumiendo que ya ha ocurrido $B$.

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{P}(P = \text{No} \mid T = 24 \text{ Horas})\,\mathbf{P}(T = 24 \text{ Horas}) + \mathbf{P}(P = \text{No} \mid T = \text{Auto})\,\mathbf{P}(T = \text{Auto}) \\
&\qquad + \mathbf{P}(P = \text{No} \mid T = \text{Estudia})\,\mathbf{P}(T = \text{Estudia}) \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{20} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{20} \\
&= \frac{99}{400} \\
&= 0{,}2475
\end{aligned}$$

**1.2 (0.5 puntos)** *Sabiendo que no se pagó un préstamo, calcula la probabilidad de que sea un Préstamo Auto.*

En este enunciado nos preguntan por el valor de $\mathbf{P}(T = \text{Auto} \mid P = \text{No})$. No nos viene dado el valor de esta probabilidad, pero sí el de $\mathbf{P}(P = \text{No} \mid T = \text{Auto})$, $\mathbf{P}(T = \text{Auto})$ y en el apartado anterior acabamos de calcular $\mathbf{P}(P = \text{No})$. Nos encontramos en el escenario perfecto para aplicar la Regla de Bayes[2], que tiene la expresión[3] siguiente:

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(B \mid A)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Para este caso, el papel de $B$ lo juega $P = \text{No}$ y el de $A$ lo juega $T = \text{Auto}$:

$$\mathbf{P}(T = \text{Auto} \mid P = \text{No}) = \frac{\mathbf{P}(P = \text{No} \mid T = \text{Auto})\,\mathbf{P}(T = \text{Auto})}{\mathbf{P}(P = \text{No})} = \frac{\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{99}{400}} = \frac{16}{33} = 0.\overline{48}.$$

**1.3 (0.5 puntos)** *Si se pagó el préstamo, calcula la probabilidad de que sea un Préstamo Estudia.*

Volvemos a aplicar el mismo procedimiento que en el apartado anterior:

$$\mathbf{P}(T = \text{Estudia} \mid P = \text{Sí}) = \frac{\mathbf{P}(P = \text{Sí} \mid T = \text{Estudia})\,\mathbf{P}(T = \text{Estudia})}{\mathbf{P}(P = \text{Sí})}.$$

[2] La Regla de Bayes, en este tipo de contextos, nos permite calcular la probabilidad de las causas conocidos los efectos —$\mathbf{P}(A \mid B)$— a partir de las probabilidades de los efectos conocidas las causas —$\mathbf{P}(B \mid A)$— o al revés. Informalmente, nos sirve para cambiar el orden de $\mathbf{P}(A \mid B)$ a $\mathbf{P}(B \mid A)$ cuando conocemos una de las dos y nos gustaría obtener la otra.

[3] Un truco para recordar esta expresión es el siguiente: está claro que $\mathbf{P}(A \text{ y } B) = \mathbf{P}(B \text{ y } A)$. Aplicamos a ambos lados de esta ecuación la descomposición que ya hemos tratado en el apartado anterior, $\mathbf{P}(A \text{ y } B) = \mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B)$ para el lado izquierdo y $\mathbf{P}(B \text{ y } A) = \mathbf{P}(B \mid A)\,\mathbf{P}(A)$ en el lado derecho. Nos queda, por lo tanto

$$\mathbf{P}(A \mid B)\,\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B \mid A)\,\mathbf{P}(A)\,;$$

y ahora basta con despejar $\mathbf{P}(A \mid B)$ de la parte izquierda —o $\mathbf{P}(B \mid A)$ de la derecha, si fuese lo que nos interesa—

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(B \mid A)\,\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)}.$$

El problema aquí es que no tenemos las probabilidades asociadas a los que sí han pagado, pero el cálculo es muy sencillo teniendo en cuenta que la probabilidad de los sucesos complementarios se calcula así: $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}(A)$. Por lo tanto, $\mathbf{P}(P = \text{Sí} \mid T = \text{Estudia}) = 1 - \mathbf{P}(P = \text{No} \mid T = \text{Estudia})$ y $\mathbf{P}(P = \text{Sí}) = 1 - \mathbf{P}(P = \text{No})$, y para estas nuevas expresiones sí que tenemos sus valores:

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1 - \mathbf{P}(P = \text{No} \mid T = \text{Estudia}))\,\mathbf{P}(T = \text{Estudia})}{1 - \mathbf{P}(P = \text{No})} \\
&= \frac{\left(1 - \frac{1}{4}\right)\frac{3}{20}}{1 - \frac{99}{400}} \\
&= \frac{45}{301} \\
&\approx 0{,}1495.
\end{aligned}$$

**1.4 (0.5 puntos)** *Según los datos proporcionados por el enunciado, indica dos sucesos relacionados con este problema que sean incompatibles. Justifica la respuesta.*

En el enunciado nos dicen que «cada cliente podía contratar, como máximo, uno de ellos». Por lo tanto, la variable $T$ solo puede tomar un único valor. Así pues, podríamos tomar como sucesos incompatibles $T = 24$ Horas y $T =$ Estudia ya que una persona que ha tomado un préstamo en este banco o bien habrá tomado un préstamo 24 Horas o uno Estudia, pero no los dos a la vez.

## Pregunta 2: Análisis (2 puntos)

**2.1 (1 punto)** *Calcula el área comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$.*

Para calcular el área comprendida entre las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$ lo primero que necesitamos saber es desde dónde hasta dónde debemos calcular este área, ya que estos serán los límites de la integral que plantearemos más adelante en (1). Ser capaces de dibujar las gráficas (véase la figura 2) nos puede ser de gran ayuda a la hora de calcular esto, aunque no es necesario. Para encontrar los límites de la dicha integral, necesitamos encontrar los puntos en los que las gráficas de $f$ y de $g$ coincidan, es decir, necesitamos encontrar los valores de $x$ para los que

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 &= |x|\,. \end{aligned}$$

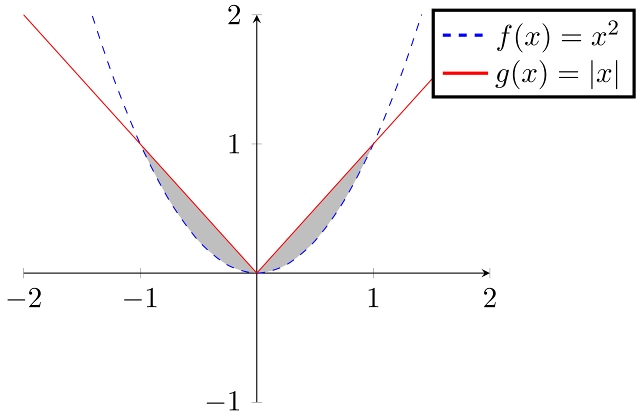



Figura 2: Gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = |x|$. Sombreado en gris esta el área comprendida entre ellas.

El problema de esta ecuación es el valor absoluto, el cual nos gustaría que desapareciera. Para ello, lo que haremos será dividir el problema en partes: en la primera, solucionaremos la ecuación asumiendo que $x < 0$ y por lo tanto que $|x| = -x$; y en la segunda, que $x \geq 0$ y por lo tanto que $|x| = x$.

- Si $x < 0$ y $|x| = -x$, entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= |x|\,, \quad \text{sustituimos } |x| \text{ por } -x; \\ x^2 &= -x \\ x^2 + x &= 0 \\ x(x+1) &= 0. \end{aligned}$$

  De esta última expresión sacamos que las dos soluciones posibles son $x = -1$ y $x = 0$. ¡Pero ojo! Aunque sea cierto que $x = 0$ es una solución de $f(x) = g(x)$, en este caso estamos asumiendo que $x < 0$, por lo que no deberíamos tenerla en cuenta. Siendo muy estrictos, esa solución deberá aparecer en el siguiente caso para poder ser considerada válida.

- Si $x \geq 0$ y $|x| = x$, entonces

$$\begin{aligned} x^2 &= |x|\,, \quad \text{sustituimos } |x| \text{ por } x; \\ x^2 &= x \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

  De esta última expresión sacamos que las dos —en este caso las dos son válidas— soluciones posibles son $x = 0$ y $x = 1$.

Sabiendo que las gráficas de $f$ y $g$ intersecan en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, podemos plantear finalmente la integral para calcular el área $A$ entre las dos gráficas:

$$A = \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left| x^2 - |x| \right| \mathrm{d}x. \tag{1}$$

De primeras, resolver esta integral puede parecer muy complicado. Pero si ya contamos con la gráfica de la figura 2 dibujada, podernos darnos cuenta de que para $x \in [-1, 1]$, $|x| \geq x^2$ y por lo tanto el absoluto externo podemos quitarlo. Si no hemos dibujado la gráfica, basta con probar con dos valores, uno de ellos en $(-1,0)$ y otro de ellos en $(0,1)$ y sustituir para ver cuál es el signo de $x^2-|x|$—¡recordad que en 0 podría cambiar también el signo ya que hay otra intersección!, por eso hay que mirar en los dos intervalos y no sirve con solo mirar un valor—:

- en $(-1,0)$ podemos tomar $-\frac{1}{2}$ y vemos que $\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}<0$;
- en $(0,1)$ podemos tomar $\frac{1}{2}$ y vemos que $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}<0$.

Lo hayamos hecho observando la gráfica o sustituyendo, llegamos a que $x^2\leq|x|$ cuando $x\in[-1,1]$ y, por lo tanto, podemos escribir la integral (1) como

$$A=\int_{-1}^{1}\left(|x|-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

Nos quedaría ahora quitarnos el absoluto interior. Para ello, separamos la integral en los intervalos $[-1,0]$ y $[0,1]$ para así poder sustituir $|x|$ por $-x$ y $x$, respectivamente:

$$A=\int_{-1}^{1}\left(|x|-x^2\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left(-x-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Estas dos integrales ya pueden resolverse de manera inmediata:

$$\begin{aligned}
A&=\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{0}^{1}\\
&=\left[\left(-\frac{1}{2}\cdot 0^2-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)-\left(-\frac{1}{2}(-1)^2-\frac{1}{3}(-1)^3\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{1}{3}\cdot 1^3\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 0^2-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)\right]\\
&=\left[0-\left(-\frac{1}{6}\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{6}\right)-0\right]\\
&=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Sin embargo podíamos habernos dado cuenta de un detalle en (2) u observando la figura 2 y es que la función $h(x)=|x|-x^2$ —el argumento de la integral en (2)— es simétrica, es decir, $h(x)=h(-x)$. Por esto, las dos integrales que aparecen en (2), $\int_{-1}^{0}\left(-x-x^2\right)\mathrm{d}x$ y $\int_{0}^{1}\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x$, son iguales y podríamos habernos simplificado algo las cuentas simplemente poniendo

$$A=2\int_{0}^{1}\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x=2\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{0}^{1}=2\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{1}{3}\cdot 1^3\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 0^2-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)\right]=\frac{1}{3}.$$

**2.2 (0.5 puntos)** *Razona, sin calcular la integral, si* $\int_1^2 xe^x\mathrm{d}x$ *tiene signo positivo o negativo.*

Para resolver este apartado debemos prestar atención a las distintas componentes que tiene el integrando $xe^x$ y a su signo en el dominio sobre el que estamos integrando, $[1,2]$. Para todo $x\in[1,2]$, tanto $x$ como $e^x$ son estrictamente positivos, por lo que su producto $xe^x$ también lo será. Por lo tanto, como el integrando es siempre estrictamente positivo en todo el dominio de integración, la integral también deberá serlo.

Si quisiésemos hilar algo más fino, podríamos decir que para todo $x\in[1,2]$ tenemos que $x\geq 1$ y que $e^x\geq e^1=e$ ya que ambas son funciones crecientes, por lo que tomarán sus valores más pequeños en los $x$ más pequeños del dominio. Así pues, $xe^x\geq 1\cdot e=e$ para todo $x\in[1,2]$ y, por lo tanto,

$$\int_1^2 xe^x\mathrm{d}x\geq\int_1^2 e\mathrm{d}x=e\int_1^2 1\cdot\mathrm{d}x=e.$$

Esto es, no solo la integral es positiva, sino que además podríamos decir que su valor es mayor o igual a $e$.

**2.3 (0.5 puntos)** *Calcula la integral* $\int_1^2 xe^x \mathrm{d}x$.

Para resolver esta integral, deberemos hacer uso de la integración por partes, que viene dada por la siguiente fórmula:

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u,$$

que muchos recuerdan con alguna frase como la típica «*u*n *d*ía *v*i *u*na *v*aca *v*estida *d*e *u*niforme». Esta nos permite aplicar la derivada sobre lo que nosotros tomemos como $u$ pero al coste de tener que aplicar una integral sobre aquello que escojamos como $\mathrm{d}v$. En nuestro caso, lo que nos interesa es tomar $u = x$ ya que aplicándole la derivada se nos quedará como 1 y $\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$ ya que así la integral se aplicará a $e^x$ y lo dejará igual, por lo que la siguiente integral será $\int e^x\mathrm{d}x$ la cuál sí que sabemos resolver. Además como estamos tratando con una integral definida, también tendremos que tener en cuenta si se transforman los límites de integración; que aunque en este caso, al ser $u = x$, no cambian, con otras transformaciones podrían sí hacerlo[4]:

$$\int_1^2 xe^x\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}u=\mathrm{d}x,\ v=e^x]{u=x,\ \mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x} xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\mathrm{d}x = xe^x\Big|_1^2 - e^x\Big|_1^2 = \left[2e^2 - 1\cdot e^1\right] - \left[e^2 - e^1\right] = e^2.$$

[4]En caso de que no nos sintámos cómodos haciendo los cambios de límites de integración, podríamos resolver la integral indefinida $\int xe^x\mathrm{d}x$ y, una vez tengamos su solución, es decir su primitiva, bastaría con que sustituyésemos los límites originales de integración sobre ella.

## Pregunta 3: Álgebra (2 puntos)

*Una fábrica de productos químicos produce 3 fármacos diferentes. Anualmente, esta fábrica tiene 4 clientes que, durante el mes de febrero, realizaron pedidos y/o devoluciones. Dichos datos (en miles de unidades) se han recogido en la siguiente matriz*

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

**3.1 (0.5 puntos)** *Indica qué representan las filas y las columnas, y especifica cuáles son las compras que ha hecho cada cliente durante el mes de febrero.*

Dado que tenemos una matriz con 4 filas y 3 columnas y en el problema nos hablan de 4 clientes y 3 fármacos, lo natural es pensar que cada fila se corresponde a los pedidos de cada cliente y cada columna representa los pedidos que ha habido de cada fármaco. Un ejemplo, en esta matriz la entrada de la segunda fila y primera columna es 3, lo cual significa que el cliente 2 ha hecho un pedido de 3 mil unidades del fármaco 1. Añadiendo los nombres de cada columna y fila es más fácil entenderlo:

| | fármaco 1 | fármaco 2 | fármaco 3 |
|---|---|---|---|
| cliente 1 | 9 | 5 | 2 |
| cliente 2 | 3 | 8 | 0 |
| cliente 3 | 0 | 0 | 0 |
| cliente 4 | 6 | 7 | -1 |

Para responder en concreto a la última parte del enunciado, simplemente tenemos que escribir la información que nos da la tabla:

- El cliente 1 ha comprado 9000 unidades del fármaco 1, 5000 del fármaco 2 y 2000 del fármaco 3.
- El cliente 2 ha comprado 3000 unidades del fármaco 1, 8000 del fármaco 2 y ninguna del fármaco 3.
- El cliente 3 no ha comprado nada.
- El cliente 4 ha comprado 6000 unidades del fármaco 1, 7000 del fármaco 2 y ha devuelto 1000 del fármaco 3.

**3.2 (1.5 puntos)** *Sabiendo que el primer cliente ha gastado un total de* 3250€*, el segundo un total de* 2850€ *y el cuarto un total de* 2800€*, ¿cuál es el precio por unidad de cada fármaco?*

Esta pregunta nos está pidiendo que solucionemos algún tipo de sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los precios de los fármacos. Llamemos $x_1$ al precio del fármaco 1, $x_2$ al precio del fármaco 2 y $x_3$ al precio del fármaco 3. El dinero que se habrá gastado el cliente 1 será las unidades de fármaco 1 que haya comprado por el precio del fármaco 1 más las unidades de fármaco 2 que haya comprado por el precio del fármaco 2 más las unidades de fármaco 3 que haya comprado por el precio del fármaco 3, es decir —haciendolo todo en miles—:

$$9x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3{,}25;$$

análogamente con los clientes 2 y 4,

$$\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 + 0x_3 &= 2{,}85 \\ 6x_1 + 7x_2 - 1x_3 &= 2{,}8 \end{aligned}$$

Aquí debemos apreciar un sistema lineal que puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}25 \\ 2{,}85 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}.$$

Este tipo de sistemas ya lo podemos resolver por el método de Gauss [5]:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 5 & 2 & 3{,}25 \\ 3 & 8 & 0 & 2{,}85 \\ 6 & 7 & -1 & 2{,}8 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 0 & 2{,}85 \\ 9 & 5 & 2 & 3{,}25 \\ 6 & 7 & -1 & 2{,}8 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \leftarrow F_3 - 2F_1]{F_2 \leftarrow F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 0 & 2{,}85 \\ 0 & -19 & 2 & -5{,}3 \\ 0 & -9 & -1 & -2{,}9 \end{array}\right)$$

Para evitar hacer una división por 19 que puede darnos problemas a la hora de arrastrar decimales, restamos la fila 3 a la 2 para quedarnos con una posición diagonal $-10$:

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 0 & 2{,}85 \\ 0 & -10 & 3 & -2{,}4 \\ 0 & -9 & -1 & -2{,}9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow \frac{-1}{10} F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 0 & 2{,}85 \\ 0 & 1 & -0{,}3 & 0{,}24 \\ 0 & -9 & -1 & -2{,}9 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + 9F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 0 & 2{,}85 \\ 0 & 1 & -0{,}3 & 0{,}24 \\ 0 & 0 & -3{,}7 & -0{,}74 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow \frac{-1}{3{,}7} F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 0 & 2{,}85 \\ 0 & 1 & -0{,}3 & 0{,}24 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}2 \end{array}\right)$$

Aquí podríamos parar y sustituir hacia atrás desde el escalón más bajo, que nos dice que $x_3 = 0{,}2$, y con el cual podemos sustituir en el segundo escalón y así sucesivamente. Sin embargo, una manera más rápida de hacer esto es continuar el método para eliminar todas las entradas que nos queden por encima de la diagonal.

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 0{,}3F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 8 & 0 & 2{,}85 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 8F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0{,}45 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftarrow \frac{1}{3} F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0{,}15 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}2 \end{array}\right).$$

Por todo esto, llegamos a la conclusión de que $x_1 = 0{,}15$, $x_2 = 0{,}3$ y $x_3 = 0{,}2$, es decir, que el precio del primer fármaco es de 150 €, el del segundo 300 € y el del tercero 200 €.

[5] Para aquellos que no estéis familiarizados con la notación que aquí utilizamos, cuando escribimos algo como $\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 3F_3}$ nos referimos a que, después de esa flecha, la fila 2 será la suma de la fila 2 anterior más tres veces la fila 3 anterior.

# Pregunta 4: Análisis (2 puntos)

**Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2.**

**4.1** *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función dada por* $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \pi)$ *donde* arctg *denota la función arcotangente.*

**4.1.1 (1 puntos)** *Determina los intervalos de concavidad y convexidad de* $f$*. Estudia y halla, si existen, los puntos de inflexión de* $f$ *(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).*

En esta pregunta nos puede ser útil conocer la gráfica de la función $\operatorname{arctg}(x)$ (en azul en la Figura 3) la cual tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, pasando de ser convexa en el intervalo $(-\infty, 0)$ a ser cóncava en el intervalo $(0, \infty)$. En el ejercicio nos preguntan, no sobre esta función, sino sobre $\operatorname{arctg}(x+\pi)$, que se corresponde a la función desplazada $\pi$ unidades a izquierda[6] (En rojo en la Figura 3). Esto nos permitiría concluir, directamente, que la función $f$ del enunciado va a tener un punto de inflexión $\pi$ unidades a la izquierda de donde lo tenía $\operatorname{arctg}(x)$, es decir, en $(-\pi, 0)$, siendo por tanto convexa en $(-\infty, -\pi)$ y cóncava en $(-\pi, \infty)$.

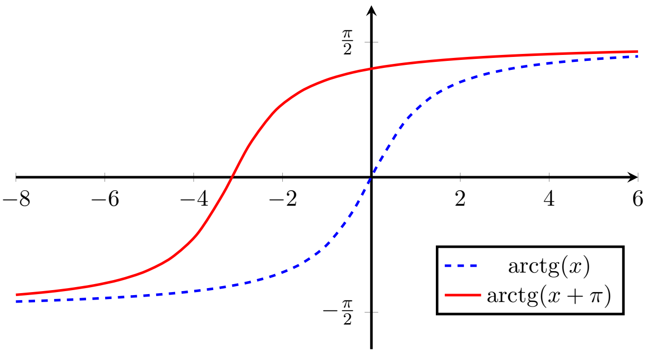



Figura 3: Gráfica de la $\operatorname{arctg}(x + \pi)$ junto con la gráfica de $\operatorname{arctg}(x)$ como referencia (en discontinuo).

Ahora bien, si no conocemos la gráfica de la arcotangente o las propiedades de traslación de gráficas, podemos recurrir al método estándar para calcular intervalos de curvatura y puntos de inflexión a través de la segunda derivada, con el cual reafirmamos lo anterioremente expuesto. En este caso tenemos que $f$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y, aplicando la regla de derivación de la arcotangente,

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} \text{ para cada } x \text{ de } \mathbb{R},$$

puesto que el denominador de esta fracción no se anula en ningún punto. De nuevo $f'$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y, aplicando la regla de derivación de un cociente

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (1 + (x + \pi)^2) - 1 \cdot 2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2} = \frac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2} \text{ para cada } x \text{ de } \mathbb{R},$$

puesto que, de nuevo, el denominador de esta fracción no se anula en ningún punto. La teoría de la curvatura mediante la segunda derivada nos dice que cuando esta es positiva la función es convexa y cuando es negativa la función es cóncava.[7] Para determinar en qué intervalos $f''$ es positiva y negativa encontramos primero en qué puntos se anula

$$f''(x) = 0 \iff \frac{-2(x + \pi)}{(1 + (x + \pi)^2)^2} = 0 \iff -2(x + \pi) = 0 \iff x + \pi = 0 \iff x = -\pi$$

pues la fracción se anula únicamente allí donde se anula el numerador. Ahora, para determinar el signo de $f''$ a derecha y a izquierda de $x = -\pi$ únicamente debemos tomar un valor a cada lado y observar el signo

[6] En general, dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función $f(x + a)$ corresponde gráficamente a un desplazamiento de $a$ unidades a izquierda, mientras que la función $f(x) + a$ corresponde a un desplazamiento de $a$ unidades hacia arriba, respecto a la original $f(x)$.

[7] Una regla mnemoténica para recordar esto es relacionar “negativa” con “triste”, asociada a la concavidad $\cap$ por ser una carita triste, y “positiva” con “feliz”, asociada a la convexidad $\cup$ por ser una carita feliz.

- a la derecha de $x = -\pi$ cogemos por ejemplo $x = 0$. Ahí se tiene que $f''(0) = \frac{-2\pi}{(1+\pi^2)^2} < 0$. Esto nos dice que $f''$ es negativa en $(-\pi, \infty)$, y por tanto en este intervalo $f$ es cóncava.
- a la izquierda de $x = -\pi$ cogemos por ejemplo $x = -4$. Ahí se tiene que $f''(-4) = \frac{-2(-4+\pi)}{(1+(-4+\pi)^2)^2} > 0$. Esto nos dice que $f''$ es positiva en $(-\infty, -\pi)$, y por tanto en este intervalo $f$ es convexa.

Concluimos por tanto que $f$ es convexa en $(-\infty, -\pi)$ y cóncava en $(-\pi, \infty)$. En $x = -\pi$ la función pasa de ser convexa a ser cóncava, y esto es lo que denominamos un punto de inflexión, que se alcanza en la abscisa $x = -\pi$ y alcanza valor $f(-\pi) = \operatorname{arctg}(-\pi + \pi) = \operatorname{arctg}(0) = 0$. El punto de inflexión es entonces $(-\pi, 0)$.

**4.1.2 (1 puntos)** *Calcula* $\lim_{x\to-\pi} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)}$. *¿Cuál sería el valor del límite si cambiamos en el denominador* $\operatorname{sen}(x)$ *por* $g(x)$, *siendo* $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ *si* $x \neq -\pi$ *y* $g(-\pi) = 2$*?*

La primera parte de la pregunta corresponde al cálculo de un límite mediante los procedimientos habituales. En particular, comenzamos por sustituir $x$ por $-\pi$ en la expresión

$$\lim_{x\to-\pi} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to-\pi} \frac{\operatorname{arctg}(x+\pi)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{arctg}(-\pi+\pi)}{\operatorname{sen}(-\pi)} = \frac{0}{0}$$

lo cual nos conduce a la indeterminación $0/0$. La manera más rápida de resolver esta indeterminación en este límite es usar la regla de l'Hôpital, derivando numerador y denominador por separado de manera que

$$\lim_{x\to-\pi} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to-\pi} \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}'(x)} = \lim_{x\to-\pi} \frac{\frac{1}{1+(x+\pi)^2}}{\cos(x)} = \frac{\frac{1}{1+(-\pi+\pi)^2}}{\cos(-\pi)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Para la segunda parte de la pregunta hemos de entender bien qué nos están preguntando. En la Figura 4 se representa en azul la función $\frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x)}$, de la cuál hemos calculado el límite cuando $x$ tiende a $-\pi$ y nos ha dado $-1$. Eso se corresponde gráficamente con que la función, a la izquierda y a la derecha de $x = -\pi$ se acerca al valor de ordenada $y = -1$. Sin embargo, esto no quiere decir que en $x = -\pi$ la función valga $-1$, pues de hecho ahí la función no está definida porque el denominador se anula —$\operatorname{sen}(-\pi) = 0$—, habiendo una discontinuidad evitable. Esta es de hecho la razón por la cual obteníamos una indeterminación al calcular el límite.

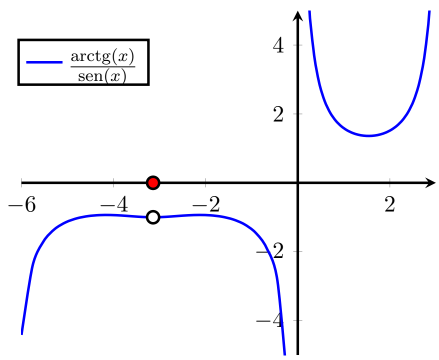


Figura 4: Gráfica de $\frac{\operatorname{arctg}(x+\pi)}{\operatorname{sen}(x)}$. En rojo, el punto que se incluiría para $x = -\pi$ en $\frac{\operatorname{arctg}(x+\pi)}{g(x)}$.

Lo que se propone ahora es sustituir ese denominador que se anula por una nueva función $g(x)$ que es exactamente $\operatorname{sen}(x)$ en todos los puntos de $\mathbb{R}$ excepto en ese $x = -\pi$ que nos estaba dando problemas, donde la función se redefine como $g(-\pi) = 2$. Tendremos entonces que la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ sí estará definida en $x = -\pi$ y valdrá $\frac{f(-\pi)}{g(-\pi)} = \frac{0}{2} = 0$, representado con el punto rojo en la Figura 4.

Sin embargo, la introducción de este nuevo punto no afecta al cálculo del límite, pues hemos de recordar que el concepto de límite consiste en acercarse infinitamente a un punto pero sin llegar a tocarlo. No importa si en el punto del límite la función no está definida —como ocurría antes—, vale 0 como ahora, o valiese cualquier otra cantidad, lo importante es que a la derecha y a la izquierda de $x = -\pi$ la función sigue acercándose al punto de ordenada $y = -1$, como se ve en la Figura 4, así que el límite sigue siendo

$$\lim_{x\to-\pi} \frac{f(x)}{g(x)} = -1.$$

Nótese que en este caso el límite no puede calcularse sustituyendo $x$ por $-\pi$, pues obtendríamos $\frac{f(-\pi)}{g(-\pi)} = 0$, que es el valor de la función en $x = -\pi$. Normalmente este método de sustitución nos funciona porque tratamos con funciones continuas, y recordemos que la definición de continuidad implica que

i Existe la función en el punto.

ii Existen los límites de la función a izquierda y a derecha del punto.

iii Los límites de la función a izquierda y a derecha del punto coinciden con la función en el punto.

Aquí tenemos que (i) y (ii) se cumplen, y como sabemos que la función no es continua necesariamente tiene que ser (iii) lo que no se cumpla. En particular, los límites a izquierda y a derecha sí coinciden, y valen $-1$ porque la definición de la función no ha cambiado en los alrededores de $x = -\pi$, pero no coinciden con el valor de la función en $x = -\pi$, que sí ha cambiado al introducir $g$ en el denominador, pasando de no estar definida a valer 0.

### 4.2 *La suma de los perímetros de un cuadrado y un triángulo equilátero es* 100 *metros.*

#### 4.2.1 (1.5 puntos) *¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea mínima?*

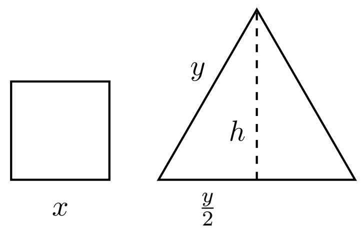


Figura 5: Diagrama del triángulo y el cuadrado.

Nos encontramos ante un problema de optimización, en el cual se quiere optimizar, en particular minimizar, el área total del cuadrado y el triángulo, en función de los lados de estos. Denotando por $x$ la medida del lado del cuadrado, pues todos los lados son iguales entre sí; e $y$ la medida del lado del triángulo, pues todos los lados son iguales entre sí pero no necesariamente iguales que los del cuadrado, (véase la figura 5) se tiene que el área del cuadrado viene dada por

$$A_{\text{cuadrado}}(x) = x^2,$$

mientras que para la del triángulo hay que hacer algunas cuentas intermedias. En concreto, necesitamos hallar la altura del triángulo. Dicha altura divide el triángulo equilatero en dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el lado del triángulo original, $y$, y cuyos catetos son la mitad del lado del triángulo original $y/2$ y la altura a determinar $h$ (véase de nuevo la figura 5). Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que

$$y^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + h^2 \Longrightarrow h^2 = y^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{3y^2}{4} \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

Entonces, el área del triángulo viene dada por

$$A_{\text{triangulo}}(y) = \frac{y \cdot h}{2} = \frac{y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}y^2.$$

Con todo ello obtenemos una función que nos da el área total del cuadrado y el rectángulo en función de $x$ e $y$:

$$A(x, y) = A_{\text{cuadrado}}(x) + A_{\text{triangulo}}(y) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}y^2.$$

Esta es la función que queremos minimizar, pero tenemos una condición extra en el enunciado, y es que la suma de los perímetros es 100 metros, lo cual viene a decir que

$$100 = P(x, y) = P_{\text{cuadrado}}(x) + P_{\text{triangulo}}(y) = 4x + 3y.$$

Podemos por tanto despejar una de las variables en función de la otra, por ejemplo

$$y(x) = \frac{100 - 4x}{3},$$

y con ello expresar la función del área a minimizar en términos de una sola variable:

$$A(x) = A(x, y(x)) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} y^2(x) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{(100-4x)^2}{9}.$$

Ahora, para minimizar esta función utilizaremos el método de la primera derivada. En este caso tenemos que $A$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ y

$$A'(x) = 2x + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{9} \cdot (100-4x) \cdot (-4) = 2x - \frac{2\sqrt{3}}{9}(100-4x) = \left(2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right) x - \frac{200\sqrt{3}}{9}.$$

La teoría de monotonía mediante la primera derivada nos dice que cuando esta es positiva la función es creciente y cuando es negativa la función es decreciente. Para determinar en qué intervalos $A'$ es positiva y negativa encontraremos primero en qué puntos se anula

$$A'(x) = 0 \iff \left(2 + \frac{8\sqrt{3}}{9}\right) x - \frac{200\sqrt{3}}{9} = 0 \iff x = \frac{\frac{200\sqrt{3}}{9}}{\frac{18+8\sqrt{3}}{9}} = \frac{200\sqrt{3}}{18+8\sqrt{3}} = \frac{300\sqrt{3}-400}{11} \approx 10{,}87.$$

Ahora, para determinar el signo de $A'$ a derecha y a izquierda de $x = \frac{300\sqrt{3}-400}{11}$ únicamente debemos tomar un valor a cada lado y observar el signo:

- a la derecha de $x = \frac{300\sqrt{3}-400}{11}$ cogemos por ejemplo $x = 11$. Ahí se tiene que $A'(11) \approx 0{,}446 > 0$. Esto nos dice que $f'$ es positiva en $(\frac{300\sqrt{3}-400}{11}, \infty)$ y por tanto en ese intervalo $f$ es creciente.
- a la izquierda de $x = \frac{300\sqrt{3}-400}{11}$ cogemos por ejemplo $x = 0$. Ahí se tiene que $A'(0) = -\frac{200\sqrt{3}}{9} < 0$. Esto nos dice que $f'$ es negativa en $(-\infty, \frac{300\sqrt{3}-400}{11})$ y por tanto en ese intervalo $f$ es decreciente.

Concluimos por tanto que $f$ es decreciente en $(-\infty, \frac{300\sqrt{3}-400}{11})$ y creciente en $(\frac{300\sqrt{3}-400}{11}, \infty)$. En $x = \frac{300\sqrt{3}-400}{11}$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, y esto es lo que denominamos un mínimo.

Otra manera de haber comprobado esto es utilizar el criterio de la segunda derivada para extremos locales, que nos dice que, dado un punto donde la primera derivada es nula, si la segunda derivada es positiva se trata de un mínimo y si es negativa se trata de un máximo.[8] En nuestro caso

$$A''(x) = 2 + \frac{8\sqrt{3}}{9} > 0 \text{ para cada } x \text{ de } \mathbb{R}, \text{ en particular para } x = \frac{300\sqrt{3}-400}{11}$$

confirmando que se trata de un mínimo.

Así pues, se tiene que el área mínima total se alcanza cuando el lado del cuadrado mide

$$x = \tfrac{300\sqrt{3}-400}{11} \approx 10{,}87 \text{ metros}$$

y con ello el lado del triángulo debe ser

$$y = y\left(\frac{300\sqrt{3}-400}{11}\right) = \frac{100 - 4 \cdot \left(\frac{300\sqrt{3}-400}{11}\right)}{3} = \frac{1100 - 1200\sqrt{3} + 1600}{33} = \frac{2700-1200\sqrt{3}}{33} \approx 18{,}83 \,\text{metros}.$$

**4.2.2 (0.5 puntos)** *¿Es posible determinar las medidas de los lados del cuadrado y del triángulo para que la suma de sus áreas sea máxima?*

En el apartado anterior hemos concluido que la función $A(x)$ que expresa el área total del cuadrado y el triángulo en función del lado del cuadrado tiene un mínimo, y por tanto ha sido posible determinar las

[8]Esto se relaciona con la teoría de la curvatura mediante la segunda derivada de la siguiente manera: si en un punto la segunda derivada es positiva se tiene que la función es convexa $\cup$, de modo que de haber un extremo local tiene que ser un mínimo; mientras que si la segunda derivada es negativa se tiene que la función es cóncava $\cap$, de modo que de haber un extremo local tiene que ser un máximo.

medidas que dan lugar a área mínima. Sin embargo, hemos visto que la función no tiene más extremos locales. Esto significa que el valor del área va a hacerse más y más grande conforme aumentemos o reduzcamos $x$. Esto podría llevarnos a pensar que no vamos a poder encontrar unos valores para área máxima, y esto sería cierto si $x$ pudiese tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$. Sin embargo, sabemos que $x$ no puede ser menor que 0, ni tampoco mayor que $100/4 = 25$, pues en tal caso el perímetro del cuadrado ya superaría los 100 metros. El área máxima debe encontrarse por tanto en $x = 0$, habiendo por tanto únicamente un triángulo de lado $100/3 = 33.\overline{3}$ y perímetro 100; o en $x = 25$, habiendo por tanto únicamente un cuadrado de lado 25 y perímetro 100.

- si $x = 0$ entonces $A(0) = \frac{10000\sqrt{3}}{36} \approx 481{,}13$ metros cuadrados.
- si $x = 25$ entonces $A(25) = 25^2 = 625$ metros cuadrados.

El área máxima se alcanza, pues, cuando el lado del cuadrado es 25 metros y el del triángulo 0.

# Pregunta 5: Geometría (2 puntos)

**Responda al apartado 5.1 o al apartado 5.2.**

**5.1** *Sean $u$ y $v$ dos vectores no nulos de $\mathbb{R}^3$ perpendiculares entre sí y $w = u \times v$ su producto vectorial. Se definen $a = (u \times v) + w$, $b = v \times (v \times w)$ y $c = u \cdot (v \times w)$. Indica si $a$, $b$ y $c$ son vectores o escalares (números). Para aquellos que sean vectores, justifica si son paralelos a algunos de los vectores $u$, $v$ y $w$.*

En el caso de $a$ simplemente debemos hacer las operaciones empezando por el paréntesis:

$$a = (u \times v) + w = w + w = 2w,$$

lo cual es un vector paralelo a $w$. En el caso de $b$, recordemos antes de nada que dados dos vectores $a$ y $b$, el producto vectorial $a \times b$ nos devuelve un vector $c$ que es perpendicular a $a$ y $b$ simultáneamente[9]. Por esto, tenemos que pensar que $v \times w$ es un vector perpendicular a $v$ y a $w$, como estamos en $\mathbb{R}^3$, tenemos que la única posibilidad es que $v \times w$ sea un múltiplo de $u$, es decir, $v \times w = ku$ donde $k \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$b = v \times (v \times w) = v \times (ku) = k(v \times u) = -k(u \times v) = -kw.$$

Es decir, que $b$ es un vector paralelo a $w$ también. Para el último cómputo, recordemos que el producto escalar de dos vectores $a$ y $b$ nos devuelve un escalar —un número y no un vector— que viene dado por $a \cdot b = \|a\| \, \|b\| \cos\theta$, donde $\theta$ es el ángulo que forman los dos vectores. En base a esto, $c = u \cdot (v \times w)$ es un escalar, ya que $u$ y $(v \times w)$ son vectores y sobre ellos aplicamos un producto escalar que los convierte en un valor escalar.

**5.2**

**5.2.1 (1 puntos)** *Halla las ecuaciones paramétricas de la recta $s$ que pasa por el punto $P(4, -3, 0)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x - 2y + z - 1 = 0$.*

Las ecuaciones paramétricas de la recta $s$ serán

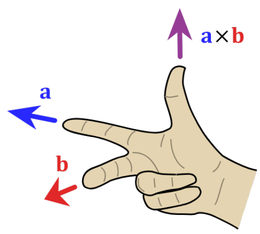
$$\begin{cases} x &= (P_s)_x + (\vec{v}_s)_x \cdot t \\ y &= (P_s)_y + (\vec{v}_s)_y \cdot t \\ z &= (P_s)_z + (\vec{v}_s)_z \cdot t \end{cases} \quad \text{con } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

donde $\vec{v}_s = ((\vec{v}_s)_x, (\vec{v}_s)_y, (\vec{v}_s)_z)$ es un vector director de la recta y $P_s((P_s)_x, (P_s)_y, (P_s)_z)$ es un punto de la recta. Recordamos que estas ecuaciones paramétricas se derivan de la ecuación vectorial

$$P_s + \vec{v}_s \cdot t \text{ con } t \text{ en } \mathbb{R}$$

que representa el hecho de que moviéndonos desde un punto $P_s$ de la recta un múltiplo del vector director $\vec{v}_s$ podemos alcanzar cualquier otro punto de la recta $s$, simbolizando esta ecuación la recta en su conjunto.

[9] Una buena manera de visualizar el producto vectorial es con la regla de la mano derecha en la que el primer dedo —con el que contaríamos «1»— representa el primer vector y el segundo dedo —el que incluímos cuando contamos «2»— representa el segundo vector (esto de izquierda a derecha):



En el caso del problema que nos ocupa, puesto que queremos que la recta pase por el punto $P$, tomaremos $P_s = P$. Por su parte, queremos que sea perpendicular al plano $\pi$, así que tomaremos un vector director que sea perpendicular a $\pi$. La manera más fácil de hacer esto es recordar la definición de "vector normal" de un plano, y es que dado un plano de ecuación

$$\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$$

el vector $\vec{n}_\pi = (a, b, c)$ es el vector normal al plano y cumple que es perpendicular a este. Así pues, tomaremos $\vec{v}_s = \vec{n}_\pi = (1, -2, 1)$. Con todo ello las ecuaciones paramétricas de $s$ son

$$\begin{cases} x &= 4 + t \\ y &= -3 - 2t \\ z &= t \end{cases} \quad \text{con } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

**5.2.2 (1 puntos)** *Considera el triángulo de vértices $A(0,0,0), B(2,4,0)$ y $C(5,0,0)$. Utilizando productos vectoriales, calcula su área, y comprueba el resultado mediante otro método.*

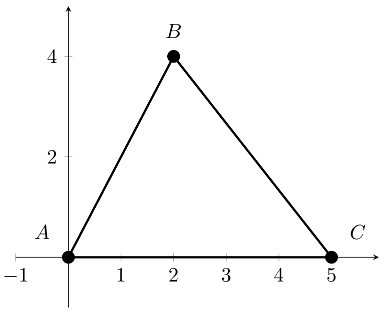


Figura 6: Diagrama del plano $OXY$.

Notar, primero de todo, que la coordenada $z$ de los tres puntos $A, B, C$ es 0, de modo que el triángulo se encuentra de hecho en el plano $OXY$. Más aún, la coordenada $y$ de los puntos $A$ y $C$ es 0, así que uno de los lados del triángulo está apoyado sobre el eje $OX$, y podemos tomarlo como la base del triángulo (véase la figura 6). Las coordenadas $x$ de $A$ y $C$ nos indican que dicho lado mide 5 unidades. Por su parte, el punto $B$ tiene coordenadas $(2,4)$, lo cual nos indica que la altura del triángulo mide 4 unidades. Así, el área del triángulo debe ser

$$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ u}^2.$$

Para calcular este área usando productos vectoriales echamos mano de la fórmula que viene en el papel de examen: *Dado un triángulo $ABC$, su área puede obtenerse con la expresión*

$$\frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}$$

En nuestro caso se tiene que

$$\overrightarrow{AB} = (5-0, 0-0, 0-0) = (5,0,0) \qquad \overrightarrow{AB} = (2-0, 4-0, 0-0) = (2,4,0)$$

de modo que

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} = 20\vec{k} = (0,0,20)$$

y por tanto el área del triángulo es $\dfrac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \dfrac{|(0,0,20)|}{2} = \dfrac{\sqrt{0^2 + 0^2 + 20^2}}{2} = \dfrac{20}{2} = 10 \text{ u}^2.$

*¡Os deseamos mucha suerte a todos en vuestro examen!*

Este documento fue realizado por Sixto José Martínez Gan y Diego Recaj Arbiol, de la Asociación Matemañicos de la Universidad de Zaragoza en diciembre de 2025.