Edificio de Matemáticas (B)
Facultad de Ciencias
Universidad de Zaragoza
Calle Pedro Cerbuna 12,
50009, Zaragoza, Zaragoza
matemanicos@unizar.es

Asociación Matemañicos

P.A.U. Comunidad Valenciana 2025: Modelo[1] Matemáticas II

Adventencia: La Asociación Matemañicos no se compromete a que los procedimientos, razonamientos ni resultados en este documentos sean válidos para la P.A.U. en la Comunidad Valenciana el año 2025. Este es simplemente un material que ponemos a la disposición de todo aquel interesado, el cual no pretende —ni debe— sustituir la labor de un docente cualificado.

Más claro: hemos escrito este documento con nuestra mejor intención, lo hemos revisado numerosas veces para que no haya ningún error y hemos intentado utilizar herramientas y procedimientos al nivel esperado en estas pruebas. Pero ello no impide que pueda haber fallos o un uso de herramientas demasiado avanzadas. Por favor, no tengáis una fe ciega en lo que veáis en este documento y atended a las instrucciones y consejos de vuestros profesores.

Índice

[1]No es el examen que aparecerá en las pruebas oficiales, sino el modelo oficial publicado para ilustrar el formato del examen. El documento publicado del que hemos sacado los enunciados puede encontrarse aquí.

Pregunta 1: Probabilidad y Estadística (2.5 puntos)

Una finca agrícola cultiva tres tipos de plantas que producen: **tomates, pimientos** y **calabacines**. Estas plantas son susceptibles de sufrir una plaga que puede afectar a su rendimiento. La finca utiliza tres métodos de control de plagas: **control biológico, pesticidas químicos** y **métodos orgánicos**. La efectividad de cada método varía según el tipo de planta.

- El **50** % del área está dedicada a **tomates**, el **30** % a **pimientos** y el **20** % a **calabacines**.
- Para los **tomates**, la finca utiliza **control biológico** en el **40** % de la finca, **pesticidas químicos** en el **30** % y **métodos orgánicos** en el **30** %.
- Para los **pimientos**, la finca utiliza **control biológico** en el **30** % de la finca, **pesticidas químicos** en el **40** % y **métodos orgánicos** en el **30** %.
- Para los **calabacines**, la finca utiliza **control biológico** en el **20** % de la finca, **pesticidas químicos** en el **50** % y **métodos orgánicos** en el **30** %.

La efectividad de cada método de control para evitar la plaga, en porcentaje, es la siguiente:

- Para los **tomates**:
  - El **control biológico** tiene un **85** % de efectividad.
  - Los **pesticidas químicos** tienen un **95** % de efectividad.
  - Los **métodos orgánicos** tienen un **80** % de efectividad.
- Para los **pimientos**:
  - El **control biológico** tiene un **80** % de efectividad.
  - Los **pesticidas químicos** tienen un **90** % de efectividad.
  - Los **métodos orgánicos** tienen un **75** % de efectividad.
- Para los **tomates**:
  - El **control biológico** tiene un **70** % de efectividad.
  - Los **pesticidas químicos** tienen un **85** % de efectividad.
  - Los **métodos orgánicos** tienen un **65** % de efectividad.

Responda a todos los apartados

1.1 (**0.75 puntos**) *¿Cuál es la probabilidad de que una planta seleccionada al azar en toda la finca esté libre de plagas (sin importar qué tipo de planta ni el método utilizado)?*

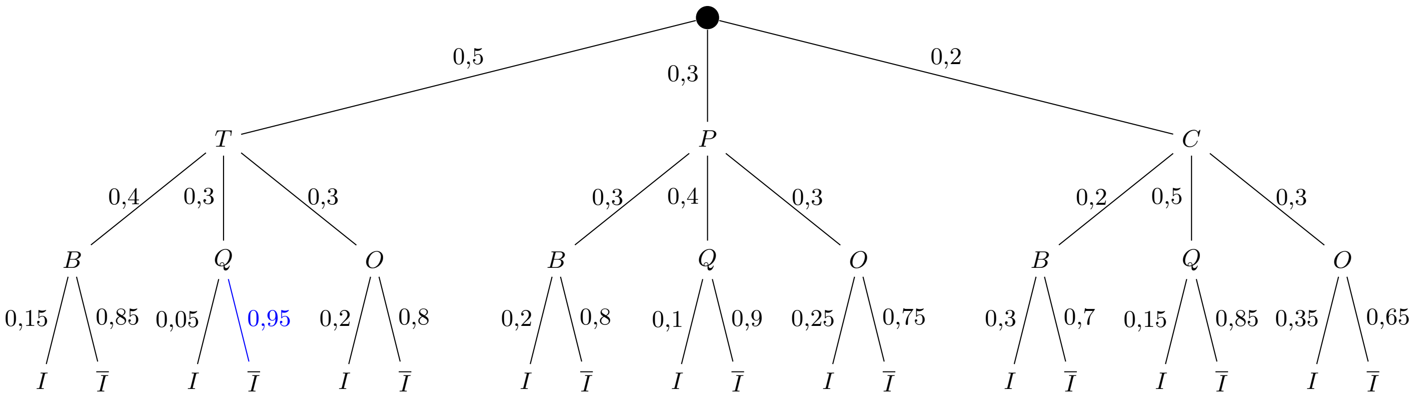
Comenzamos por poner nombre a los diferentes sucesos que necesitamos en la resolución del problema:

- T: ser tomate, P: ser pimiento, C: ser calabacín;
- B: ser de control biológico, Q: ser de pesticidas químicos, O: ser de métodos orgánicos;
- I: estar infectado por una plaga e $\overline{I}$: no estar infectado por una plaga.

A partir de esto podemos reescribir el enunciado en forma de probabilidades de estos sucesos y sus intersecciones:

- Distribución de la finca: $\mathbf{P}(T) = 0{,}5$, $\mathbf{P}(P) = 0{,}3$ y $\mathbf{P}(C) = 0{,}2$.
- Métodos de control en tomates: $\mathbf{P}(B \mid T) = 0{,}4$, $\mathbf{P}(Q \mid T) = 0{,}3$ y $\mathbf{P}(O \mid T) = 0{,}3$.
- Métodos de control en pimientos: $\mathbf{P}(B \mid P) = 0{,}3$, $\mathbf{P}(Q \mid P) = 0{,}4$ y $\mathbf{P}(O \mid P) = 0{,}3$.
- Métodos de control en calabacines: $\mathbf{P}(B \mid C) = 0{,}2$, $\mathbf{P}(Q \mid C) = 0{,}5$ y $\mathbf{P}(O \mid C) = 0{,}3$.
- Efectividad en tomates: $\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid T \cap B\big) = 0{,}85$, $\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid T \cap Q\big) = 0{,}95$ y $\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid Q \cap O\big)\, 0{,}8$.
- Efectividad en pimientos: $\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid P \cap B\big) = 0{,}8$, $\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid P \cap Q\big) = 0{,}9$ y $\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid P \cap O\big) = 0{,}75$.
- Efectividad en calabacines: $\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid C \cap B\big) = 0{,}7$, $\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid C \cap Q\big) = 0{,}85$ y $\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid C \cap O\big) = 0{,}65$.

Recordemos que $X \cap Y$ es la intersección de X e Y, es decir, que ambos eventos se den al mismo tiempo; y $X|Y$ es X condicionado a Y, es decir, que se dé X sabiendo que Y se da. Por ejemplo, $\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid P \cap O\big) = 0{,}75$ quiere decir que la probabilidad de que una planta no esté infectada —$\overline{I}$— condicionada a que esta planta sea un pimiento y esté tratada con métodos orgánicos —$P \cap O$— es 0,75. Ilustramos toda esta información como un árbol:



Los valores que aparecen en las «ramas» son las probabilidades del evento que se encuentra debajo de la rama condicionado al que está encima. Por ejemplo, el valor de la rama que va desde el punto de arriba del todo hasta el nodo P es la probabilidad de que una planta sea un pimiento —$\mathbf{P}(P)$—. Otro ejemplo, el valor que aparece en la rama que está debajo de T y va de Q a $\overline{I}$ —marcada en azul— se corresponde con la probabilidad de que la planta no esté infectada condicionada a que esté tratada con pesticidas y sea un tomate —$\mathbf{P}\big(\overline{I} \mid Q \cap T\big)$—.

Ahora estamos listos para responder a la pregunta, que en esencia es calcular $P(\overline{I})$. Utilizamos para ello el Teorema de la Probabilidad Total. Este teorema lo que nos dice es que la probabilidad de un evento, en este caso $\overline{I}$, es la misma que la suma de las probabilidades de este evento condicionado a otros, siempre y cuando esos otros eventos cubran todas las posibilidades. En este problema, una planta solo puede ser un tomate, un pimiento o un calabacín, no hay más opciones de planta; y solo puede estar tratada con medidas biológicas, pesticidas químicos o métodos orgánicos, no hay ninguna opción más de tratamiento. Por lo tanto, la probabilidad de que la planta no esté infectada —$\mathbf{P}\big(\overline{I}\big)$— es la misma que la suma de las probabilidades de no estar infectada siendo un tomate con control biológico —$\mathbf{P}\big(\overline{I} \cap T \cap B\big)$—, de no estar infectada siendo un tomate con pesticidas químicos —$\mathbf{P}\big(\overline{I} \cap T \cap Q\big)$—, de no estar infectada siendo un tomate con métodos orgánicos —$\mathbf{P}\big(\overline{I} \cap T \cap O\big)$—, de no estar infectada siendo un pimiento con control biológico —$\mathbf{P}\big(\overline{I} \cap P \cap B\big)$— y así sucesivamente hasta haber cubierto las nueve posibilidades. Recordemos además que

$$\mathbf{P}(X \cap Y \cap Z) = \mathbf{P}(Y \cap Z)\,\mathbf{P}(X \mid Y \cap Z) = \mathbf{P}(Z)\,\mathbf{P}(Y \mid Z)\,\mathbf{P}(X \mid Y \cap Z)\,.$$

Debemos observar con atención qué probabilidades sabemos para poder descomponer las probabilidades de forma que los factores sean conocidos. Con todo esto ya podemos calcular $\mathbf{P}\big(\overline{I}\big)$:

$$
\begin{array}{rccccc}
\mathbf{P}\big(\overline{I}\big) = & \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap B\cap T\big) & + & \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap Q\cap T\big) & + & \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap O\cap T\big) \\
+ & \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap B\cap P\big) & + & \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap Q\cap P\big) & + & \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap O\cap P\big) \\
+ & \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap B\cap C\big) & + & \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap Q\cap C\big) & + & \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap O\cap C\big) \\
\\
= & \mathbf{P}(T)\,\mathbf{P}(B\mid T)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid B\cap T\big) & + & \mathbf{P}(T)\,\mathbf{P}(Q\mid T)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid Q\cap T\big) & + & \mathbf{P}(T)\,\mathbf{P}(O\mid T)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid O\cap T\big) \\
+ & \mathbf{P}(P)\,\mathbf{P}(B\mid P)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid B\cap P\big) & + & \mathbf{P}(P)\,\mathbf{P}(Q\mid P)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid Q\cap P\big) & + & \mathbf{P}(P)\,\mathbf{P}(O\mid P)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid O\cap P\big) \\
+ & \mathbf{P}(C)\,\mathbf{P}(B\mid C)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid B\cap C\big) & + & \mathbf{P}(C)\,\mathbf{P}(Q\mid C)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid Q\cap C\big) & + & \mathbf{P}(C)\,\mathbf{P}(O\mid C)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid O\cap C\big) \\
\\
= & 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}85 & + & 0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}95 & + & 0{,}5\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8 \\
+ & 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8 & + & 0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}9 & + & 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}75 \\
+ & 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot 0{,}7 & + & 0{,}2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}85 & + & 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}65 \\
\\
= & 0{,}832. & & & &
\end{array}
$$

En definitiva, la probabilidad de que una planta seleccionada al azar esté libre de plagas es 0,832.

1.2 (**1 punto**) *Si se sabe que una planta seleccionada está libre de plagas, ¿cuál es la probabilidad de que esa planta sea un pimiento?*

Con la notación del apartado anterior ahora debemos calcular $\mathbf{P}\big(P\mid\overline{I}\big)$. Utilizamos para ello el Teorema de Bayes, que nos permite relacionar la probabilidad de un planta sea un pimiento condicionada a que no esté infectado —$\mathbf{P}\big(P\mid\overline{I}\big)$— con la probabilidad de que no esté infectado condicionada a que sea un pimiento —$\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid P\big)$—:

$$\mathbf{P}\big(P\mid\overline{I}\big) = \frac{\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid P\big)\,\mathbf{P}(P)}{\mathbf{P}\big(\overline{I}\big)}.$$

Sabemos que $\mathbf{P}\big(\overline{I}\big) = 0{,}832$ por el apartado anterior. Para calcular $\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid P\big)\,\mathbf{P}(P)$ podemos volver a utilizar el Teorema de la Probabilidad Total como hemos hecho en el apartado anterior. Primero nos damos cuenta de que $\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid P\big)\,\mathbf{P}(P) = \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap P\big)$, que es la probabilidad de que un pimiento no esté infectado. Razonando como en el apartado anterior, esta probabilidad será la suma de las probabilidades de que un pimiento no esté infectado con control biológico, de que un pimiento no esté infectado con pesticidas químicos y de que un pimiento no esté infectado con métodos orgánicos, es decir:

$$\mathbf{P}\big(\overline{I}\cap P\big) = \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap B\cap P\big) + \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap Q\cap P\big) + \mathbf{P}\big(\overline{I}\cap O\cap P\big)$$

y descomponemos como en el apartado anterior; de hecho, esto se corresponde con la segunda fila de las sumas anteriores:

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{P}(P)\,\mathbf{P}(B\mid P)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid B\cap P\big) + \mathbf{P}(P)\,\mathbf{P}(Q\mid P)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid Q\cap P\big) + \mathbf{P}(P)\,\mathbf{P}(O\mid P)\,\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid O\cap P\big) \\
&= 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}8 + 0{,}3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}9 + 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot 0{,}75 \\
&= 0{,}2475.
\end{aligned}
$$

Así pues, la probabilidad de que una planta al azar que no está infectada sea un pimiento es

$$\mathbf{P}\big(P\mid\overline{I}\big) = \frac{\mathbf{P}\big(\overline{I}\mid P\big)\,\mathbf{P}(P)}{\mathbf{P}\big(\overline{I}\big)} = \frac{\mathbf{P}\big(\overline{I}\cap P\big)}{\mathbf{P}\big(\overline{I}\big)} = \frac{0{,}2475}{0{,}832} = 0{,}2974759\widehat{615384} \approx 0{,}2975.$$

[El símbolo «≈» significa «es aproximadamente igual a».]

1.3 (**1 punto**) *Un consumidor compra 11 tomates que han sido controlados mediante métodos orgánicos. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 3 de ellos hayan evitado los efectos de la plaga?*

Consideremos un experimento aleatorio consistente en coger un tomate controlado mediante métodos orgánicos y ver si ha evitado los efectos de la plaga. Dicho experimento solo tiene dos posibles resultados: éxito (que no tenga plaga) o fracaso (que sí tenga), es decir, cada uno de estos experimentos puede verse como una variable aleatoria del tipo Bernoulli. La probabilidad de éxito es

$$p = \mathbf{P}\big(\overline{I} \mid T \cap O\big) = 0{,}8$$

y la probabilidad de fracaso

$$q = 1 - p = 0{,}2.$$

Podemos entender el enunciado como la realización de este experimento $n = 11$ veces de forma independiente.

Llamemos X a la variable aleatoria que representa el número de tomates de estos 11 que han evitado los efectos, es decir, el número de éxitos entre los 11 intentos realizados. Esta variable cuenta el número de éxitos de un número finito de experimentos de Bernoulli independientes entre sí, así que sigue una distribución binomial de parámetros $n = 11$ y $p = 0{,}8$. Esto lo denotamos como

$$X \sim \mathrm{Bin}(11,\ 0{,}8).$$

En general, la expresión de la probabilidad de que haya k éxitos en una distribución binomial es

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{para } k = 0, \ldots, n.$$

que sustituyendo los valores que nos han dado queda como

$$= \binom{11}{k} \cdot 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{11-k} \quad \text{para } k = 0, \ldots, 11.$$

Lo que buscamos es el valor de $\mathbf{P}(X \geq 3)$, que podemos calcular de la siguiente forma:

$$\mathbf{P}(X \geq 3) = \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 4) + \cdots + \mathbf{P}(X = 10) + \mathbf{P}(X = 11)\,.$$

Sin embargo, sumar tantos términos es menos eficiente que hacer

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbf{P}(X < 3) \\
&= 1 - [\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2)] \\
&= 1 - \left[\binom{11}{0} \cdot 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^{11-0} + \binom{11}{1} \cdot 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^{11-1} + \binom{11}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^{11-2}\right] \\
&= 1 - \left[0{,}2^{11} + 11 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^{10} + 55 \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^9\right] \\
&= 1 - 0{,}000018944 \\
&= 0{,}999981056 \\
&\approx 0{,}99998.
\end{aligned}$$

[El símbolo «≈» significa «es aproximadamente igual a».]

En conclusión, la probabilidad de que al menos 3 de los 11 tomates comprados por el consumidor hayan evitado los efectos de la plaga es 0,999981056, o, si queremos aproximar, 0,99998.

Pregunta 2: Álgebra (2.5 puntos)

Responda al apartado 2.1 o al apartado 2.2.

2.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + az = -2 \\ -x + 2y - az = 3 \\ ax + y + z = 2 \end{cases}$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

2.1.1 (1.25 puntos) *Discutir el sistema en función del parámetro a.*

Ya conocemos la importancia de trabajar de forma matricial los sistemas de ecuaciones lineales. Así pues, expresamos este sistema como una ecuación de la forma $Ax = b$ donde A será una matriz y x y b serán vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & 2 & -a \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ahora, con esta expresión matricial, el sistema puede ser estudiado a través de las propiedades de las matrices. En particular, sabemos que un sistema de la forma $Ax = b$ admite una única solución para x si y solo si el determinante de la matriz de coeficientes, que aquí es A, tiene un determinante no nulo. Si el determinante es 0, deberemos examinar esos casos más en detalle ya que puede que haya infintas o ninguna solución. Procedemos por tanto a averiguar el valor del determinante usando la regla de Sarrus:

$$\det A = 2 - a + a^2 - \left(2a^2 + 1 - a\right) = a^2 - 1.$$

Este valor depende del parámetro a. Para ver cuándo es 0 basta con resolver una ecuación de segundo grado:

$$\det A = 0$$
$$a^2 - 1 = 0;$$

recordemos que la diferencia de cuadrados es la suma por la diferencia y que $a^2 - 1 = a^2 - 1^2$;

$$(a-1)(a+1) = 0.$$

De esta última igualdad vemos ya que $\det A = 0$ si y solo si $a = 1$ o $a = -1$. Para el resto de valores reales, es decir, cuando a está en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, el determinante no es 0 y por lo tanto el sistema tendrá una única solución.

Veamos ahora qué ocurre cuando el determinante es 0:

- Empecemos sustituyendo a por -1 en la igualdad (1). Entonces el sistema nos queda así:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

  Para resolverlo, utilizaremos el método de Gauss para escalonar la matriz ampliada $(A|b)$ y ver si tiene solución. La matriz ampliada es aquella que se construye poniendo el vector b al lado de la matriz A y nos permite operar con todo el sistema a la vez, no solo con la matriz de coeficientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{3}$$

[Cuando escribimos algo como $F_3 \leftarrow F_3 + F_1$ nos referimos a que estamos sumando la fila 3 y la 1 y escribiendo el resultado en la fila 3.]

Esta última matriz ya está escalonada y nos muestra una última fila con todo ceros. El resto de filas tienen pivotes no nulos. Esto quiere decir que el sistema admite soluciones, pero no solo una única. De hecho, habrá infinitas.

- Veamos ahora qué ocurre en el otro caso, cuando $a = 1$. Repitiendo lo mismo que antes nos queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

En este caso, la situación es diferente. La última fila está compuesta por ceros en todas las posiciones que corresponden a coeficientes, sin embargo el término independiente no es 0. Si reescribiésemos esto como un sistema de ecuaciones, nos quedaría $0x + 0y + 0z = 2$ —que sería lo mismo que decir $0 = 2$— como una de las ecuaciones a satisfacerse. Esa condición es imposible de satisfacer para cualquier valor de x, y, z. Por lo tanto, concluimos que si $a = 1$, el sistema no puede tener solución.

Resumiendo todo esto, tenemos que el sistema es compatible determinado cuando a está en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, compatible indeterminado cuando $a = -1$ e incompatible cuando $a = 1$.

2.1.2 (1.25 puntos) *Calcular las soluciones del sistema cuando éste sea compatible.*

Empecemos por el caso en el que $a = -1$. Para no repetir las operaciones, recuperamos la matriz ampliada tal y como la dejamos en (3):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Reescribimos esto como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1x - 1y - 1z = -2 \\ 0x + 1y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y - z = -2 \\ \qquad y = 1 \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{en la primera ecuación.}]{\text{Sustituimos } y = 1} \begin{cases} x - 1 - z = -2 \\ \qquad y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = -1 \\ \qquad y = 1 \end{cases}$$

Y ahora, para poder expresar todas las soluciones, decimos que $z = t$ donde t es un parámetro real. Así, podemos despejar $x - z = -1$ como $x = z - 1 = t - 1$. De esta manera, nos queda que si $a = -1$, las soluciones del sistema son de la forma $(x, y, z) = (t - 1, 1, t),\ t \in \mathbb{R}$.

Resolvamos ahora el caso en el que a está en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Ahora, construiremos la matriz ampliada desde de la ecuación (1) y volveremos a utilizar Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ -1 & 2 & -a & 3 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - aF_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1+a & 1-a^2 & 2+2a \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - (1+a)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1+a \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{Como } a \neq 1 \text{ y } a \neq -1, \\ \text{se puede dividir por } 1-a^2 \neq 0. \\ \text{Recordamos que } 1-a^2 = (1-a)(1+a).}]{F_3 \leftarrow \frac{1}{1-a^2} F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/(1-a) \end{array}\right)$$

Como antes, reescribimos esto como un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1x - 1y + az = -2 \\ 0x + 1y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 1z = \dfrac{1}{1-a} \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + az = -2 \\ \qquad\quad y = 1 \\ \qquad\quad z = \dfrac{1}{1-a} \end{cases} \xLeftrightarrow[\text{en la primera ecuación.}]{\text{Sustituimos } y = 1 \text{ y } z = \frac{1}{1-a}} \begin{cases} x - 1 + a\dfrac{1}{1-a} = -2 \\ \qquad y = 1 \\ \qquad z = \dfrac{1}{1-a} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{1}{a-1} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{1}{1-a} \end{cases}$$

En conclusión, tenemos que si a está en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, la solución será $(x, y, z) = (\frac{1}{a-1}, 1, \frac{1}{1-a})$.

2.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obtener (con los cálculos intermedios necesarios, así como con la mención explícita de los teoremas o propiedades utilizados):

2.2.1 (1.25 puntos) *Las matrices A^{-1} y $B = A^3 - 3A^2 + 5A$.*

Para calcular la inversa de A, construimos una matriz 3×6 con A en las primeras tres columnas y la matriz identidad en las últimas tres.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora, para obtener la inversa, hacemos operaciones por filas para convertir A —las tres columnas de la izquierda— en la matriz identidad. Cuando hayamos terminado, en el lado derecho tendremos la inversa de A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow \frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3+2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 & -1/3 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow \frac{3}{5}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2-\frac{1}{3}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1-2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{array}\right)$$

Tenemos por lo tanto que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

Procedemos ahora a calcular B. Primero calculamos las potencias:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \; A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Una vez conocidas estas potencias, se obtiene el resultado sustituyendo:

$$B = A^3 - 3A^2 + 5A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 (1.25 puntos) *Los valores α y β tales que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$.*

En este subapartado merece la pena parar un segundo y observar detenidamente lo que nos piden y la información que ya tenemos de apartados anteriores. Podemos darnos cuenta de que la expresión de B es parecida a la que aparece en el lado izquierdo de la igualdad:

$$\begin{aligned} B &= A^3 - 3A^2 + 5A \\ &= A\left(A^2 - 3A + 5U\right); \end{aligned}$$

sacamos 5 como factor común para conseguir que el coeficiente que acompaña a U sea 1, como en la expresión del enunciado;

$$= 5A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + U\right).$$

Ya tenemos en el lado derecho un factor de la misma forma que en el enunciado, en este caso con $\alpha = \frac{1}{5}$ y $\beta = \frac{-3}{5}$. Ahora bien, con esto no es suficiente. En el enunciado nos piden que $\alpha A^2 + \beta A + U = A^{-1}$, pero podemos relacionarlo con lo que ya tenemos: recordamos que A^{-1} es la única matriz de forma que $AA^{-1} = U$. Así pues, si podemos verificar que $A\left(\alpha A^2 + \beta A + U\right) = U$, habremos encontrado la solución. Basta con darse cuenta de que $B = 5U$:

$$\begin{aligned} B &= 5A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + U\right) \\ 5U &= 5A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + U\right) \\ U &= A\left(\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + U\right). \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + U$ satisface la condición característica de la inversa de A^{-1}, es decir, que multiplicada por A da la unidad, tenemos que $\frac{1}{5}A^2 - \frac{3}{5}A + U$ es en efecto la inversa y, por lo tanto, que los valores que buscábamos de α y β son $\frac{1}{5}$ y $\frac{-3}{5}$, respectivamente.

Pregunta 3: Geometría (2.5 puntos)

Responda al apartado 3.1 o al apartado 3.2.

3.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas las rectas $r : \begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases}$ y $s : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z + 2$, obtener:

3.1.1 (1.25 puntos) *La ecuación del plano π paralelo a ambas y que pase por el origen.*

Al ser un plano que pase por el origen, solo nos interesa conocer un vector director de cada recta. Para obtener un vector director de la recta r buscaremos dos puntos dentro de esta y los restaremos para obtenerlo. Para ello, simplificamos un poco el sistema:

$$\begin{cases} y - z = 0 \\ 2x + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = -1 \end{cases}$$

Ahora escogemos dos puntos[2] que sepamos que satisfacen ambas ecuaciones. Lo ideal es cogerlos lo más sencillos posibles, para evitar cuentas. Nosotros escogemos $\overrightarrow{r_1} = (-1, 0, 0)$ y $\overrightarrow{r_2} = (-1, 1, 1)$. Un posible vector director es $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = (-1, 1, 1) - (-1, 0, 0) = (0, 1, 1)$. Un inciso: no hay un único vector director ya que todos sus múltiplos, como $(0, 2, 2)$ o $(0, -\pi, -\pi)$, también engendran la recta. Nosotros escogemos este por parecernos el más sencillo, pero cualquier otra elección serviría igual.

Lo siguiente es conseguir un vector director de s. Para esto, debemos recordar cómo se llega a la ecuación continua de la recta. Partimos de una ecuación bastante conocida, la vectorial: $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{v}t, t \in \mathbb{R}$ la cual podemos expresar por componentes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} t \iff \begin{cases} x = a_1 + v_1 t \\ y = a_2 + v_2 t \\ z = a_3 + v_3 t \end{cases} \iff \begin{cases} x - a_1 = v_1 t \\ y - a_2 = v_2 t \\ z - a_3 = v_3 t \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x - a_1}{v_1} = t \\ \dfrac{y - a_2}{v_2} = t \\ \dfrac{z - a_3}{v_3} = t \end{cases} \tag{4}$$

Los lados derechos de las ecuaciones son iguales, por lo que $\frac{x-a_1}{v_1} = \frac{y-a_2}{v_2} = \frac{z-a_3}{v_3} = t$, que es la ecuación continua junto con la t. A nosotros nos interesan los denominadores v_1, v_2 y v_3, que son los coeficientes de un vector director, así que ponemos nuestra ecuación de la misma forma: $\frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$. Tomamos por lo tanto $v_1 = -1$, $v_2 = 3$, $v_3 = 1$ y así obtenemos un vector director de s, $\overrightarrow{v} = (-1, 3, 1)$. ¡Importante!: las variables x, y, z no tienen ningún signo negativo ni ningún otro coeficiente delante en el numerador; de no ser así, este razonamiento no sería válido. Es decir, si tuviésemos ecuaciones como $\frac{3x-2}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1}$ o $\frac{x-2}{-1} = \frac{-y}{3} = \frac{z+2}{1}$ no podríamos tomar directamente los denominadores.

Teniendo ya un vector director de cada recta, $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ para r y s respectivamente, calculamos un vector $\overrightarrow{w}$ que sea perpendicular a ambos. Para esto utilizamos el producto vectorial de $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{k} - \overrightarrow{j} - \left(-\overrightarrow{k} + 0\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{i}\right) = -2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} = (-2, -1, 1). \tag{5}$$

[2] La diferencia entre punto y vector es muy sutil, así que en este problema hablaremos de puntos y vectores como si fuesen lo mismo.

Ahora sabemos que $\overrightarrow{w}$ es un vector perpendicular a los dos vectores que generan el plano π. Así que un vector estará dentro de este plano si y solo si es perpendicular a $\overrightarrow{w}$. ¡Cuidado!: esto lo podemos decir ya que π pasa por el origen; si no fuese así, esto no tendría porqué ser cierto. Recordemos que dos vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ son perpendiculares si su producto escalar $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ es 0. Entonces, la condición para que un vector (x, y, z) esté dentro del plano π la podemos expresar como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{w} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \\ -2x - y + z &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Y esta es la ecuación del plano paralelo a ambas rectas que pasa por el origen.

3.1.2 (1.25 puntos) *La distancia de un punto de r y de un punto de s al plano π.*

Como ambas rectas son paralelas al plano π, la distancia de un punto de r a π es siempre igual y lo mismo ocurre con la recta s. Por lo tanto, solo nos hará falta escoger un punto de cada recta y medir la distancia de este a π. En particular, el más sencillo que se nos ocurre para r es $\overrightarrow{p} = (-1, 0, 0)$ y para s el punto $\overrightarrow{p} = (2, 0, -2)$. Lo primero que tenemos que encontrar es cuál es el punto del plano π más cercano al punto $\overrightarrow{p}$. Después, calculamos la distancia entre $\overrightarrow{p}$ y su proyección sobre π, que será la distancia mínima:

- Empecemos con la recta r tomando $\overrightarrow{p} = (-1, 0, 0)$. En este caso, para ilustrar varias maneras de resolver este ejercicio, lo haremos proyectando $\overrightarrow{p}$ sobre π para obtener el punto de este plano más cercano a $\overrightarrow{p}$. Empezamos proyectando sobre $\overrightarrow{u}$:

$$\text{proy}_{\overrightarrow{u}}\, \overrightarrow{p} = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{p}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}} \overrightarrow{u} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \overrightarrow{u} = \frac{0}{2} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0};$$

  y después sobre $\overrightarrow{v}$:

$$\text{proy}_{\overrightarrow{v}}\, \overrightarrow{p} = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{p}}{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}} \overrightarrow{v} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \overrightarrow{v} = \frac{1}{11} \overrightarrow{v} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/11 \\ 3/11 \\ 1/11 \end{pmatrix}.$$

  Por lo tanto, la proyección de $\overrightarrow{p}$ sobre π será la suma de las proyecciones de $\overrightarrow{p}$ sobre los vectores que generan el plano π:

$$\overrightarrow{p_\pi} = \text{proy}_{\overrightarrow{u}}\, \overrightarrow{p} + \text{proy}_{\overrightarrow{v}}\, \overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/11 \\ 3/11 \\ 1/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/11 \\ 3/11 \\ 1/11 \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos la distancia entre $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{p_\pi}$, que es la distancia entre $\overrightarrow{p}$ y π:

$$\|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_\pi}\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/11 \\ 3/11 \\ 1/11 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -10/11 \\ -3/11 \\ -1/11 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{11} \left\| \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{11}\sqrt{10^2 + 3^2 + 1^2}$$
$$= \frac{1}{11}\sqrt{110} = \sqrt{\frac{10 \cdot 11}{11^2}} = \sqrt{\frac{10}{11}}.$$

- Para s, con el propósito de mostrar otro método de calcular esta distancia mínima, encontraremos la intersección entre la recta perpendicular al plano π que pase por el punto $\overrightarrow{p} = (2, 0, -2)$ y el propio plano π. Este será el punto de π más cercano a $\overrightarrow{p}$, que de hecho es su proyección sobre π. Por último calcularemos la distancia entre esta intersección y $\overrightarrow{p}$. La ecuación de la recta que pasa por $\overrightarrow{p}$ y es perpendicular a π —recordemos que un vector normal al plano π es el vector $\overrightarrow{w}$ que obtuvimos en (5)— viene dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t \iff \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -t \\ z = -2 + t \end{cases} \tag{7}$$

donde $t \in \mathbb{R}$. Sustituimos ahora en la ecuación (6) para ver dónde interseca esta recta con π:

$$\begin{aligned} -2x - y + z &= 0 \\ -2(2 - 2t) - (-t) + (-2 + t) &= 0 \\ -6 + 6t &= 0 \\ t &= 1; \end{aligned}$$

Es decir, que la recta dada por (7) interseca con π cuando $t = 1$. Sustituyendo en (7) nos queda que el punto de intersección es $\overrightarrow{p_\pi} = (0, -1, -1)$. De nuevo, la distancia entre $\overrightarrow{p}$ y $\overrightarrow{p_\pi}$ es la distancia entre la recta s y el plano π:

$$\|\overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_\pi}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}.$$

3.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Dadas la recta r y el plano π, de ecuaciones $r : \frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$ y $\pi : ax + y - z = b$ con a y b parámetros reales, obtener:

3.2.1 (1 puntos) *Los valores del parámetro a para los que r y π se cortan en un único punto y calcular las coordeandas de dicho punto en función del parámetro a.*

Una recta corta en un único punto a un plano si y solo si la recta no es paralela al plano. En este caso, un vector director de la recta se puede obtener igual que en el subapartado 3.1.1 simplemente tomando los denominadores (¡ojo con esto!: lee con atención la adventencia del subapartado 3.1.1 acerca de cuándo puede hacerse.) y nos queda que un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (1, 3, 4)$. Por otro lado, el vector de los coeficientes que acompañan a las variables en la ecuación de π, $\overrightarrow{n} = (a, 1, -1)$ es el vector perpendicular al plano. La condición de que $\overrightarrow{u}$ no sea paralelo al plano π se puede expresar como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} &\neq 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} &\neq 0 \\ a + 3 - 4 &\neq 0 \\ a &\neq 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Es decir, que la recta r cortará en un único punto al plano π si y solo si a está en $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Para calcular el punto de intersección, expresamos la ecuación de la recta en forma paramétrica con el cambio que hemos ilustrado en (4):

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4} \iff \begin{cases} x = 5+t \\ y = 1+3t \\ z = 4t \end{cases} \quad \text{donde } t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Sustituimos ahora estas expresiones para las variables x, y, z dentro de la ecuación del plano:

$$\begin{aligned} a(5+t) + (1+3t) - (4t) &= b \\ (a-1)t + 5a + 1 &= b \\ (a-1)t &= b - 5a - 1 \end{aligned}$$

sabemos que $a \neq 1$, por lo que podemos dividir por $a-1$;

$$t = \frac{b-5a-1}{a-1}$$

y todavía podemos hacer algo más: modificando ligeramente el numerador podemos encontrar una expresión para el valor de t más sencilla de operar;

$$\begin{aligned} &= \frac{b+6-5(a-1)}{a-1} \\ &= \frac{b+6}{a-1} - 5. \end{aligned}$$

Por último, sustituimos este valor de t en las ecuaciones que hemos obtenido en (9) para encontrar el punto de intersección en función de a (y, como puede verse, también en función de b[3]):

$$\begin{cases} x = 5 + \dfrac{b+6}{a-1} - 5 = \dfrac{b+6}{a-1} \\ y = 1 + 3\left(\dfrac{b+6}{a-1} - 5\right) = 3\dfrac{b+6}{a-1} - 14 \\ z = 4\left(\dfrac{b+6}{a-1} - 5\right) = 4\dfrac{b+6}{a-1} - 20 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{b+6}{a-1} \\ 3\frac{b+6}{a-1} - 14 \\ 4\frac{b+6}{a-1} - 20 \end{pmatrix} \text{ es el punto de intersección de } r \text{ y } \pi \text{ cuando } a \neq 1.$$

3.2.2 (1.5 puntos) *Los valores de a y b tales que la recta r esté contenida en el plano π y los valores de los parámetros para que la recta r no corte al plano π.*

Recordemos que para que la recta r no fuese paralela a π se tenía que cumplir la condición (8). En este caso buscamos todo lo contrario: buscamos que r sí sea paralela a π, por lo que $a = 1$.

Sabiendo que la recta r es paralela al plano π cuando $a = 1$, nos bastará tomar un punto cualquiera de r, por ejemplo $\overrightarrow{p} = (5, 1, 0)$ y ver si está también en π. Si lo está, toda la recta estará contenida en π; si no, la recta no corta en ningún momento a π. Lo vemos:

$$\begin{aligned} ax + y - z &= b \\ 1 \cdot 5 + 1 - 0 &= b \\ b &= 5. \end{aligned}$$

Tenemos por lo tanto que $\overrightarrow{p}$ pertenece a π si y solo si $b = 5$. En conclusión, si $a = 1$ y $b \in (-\infty, 5) \cup (5, \infty)$, entonces la recta y el plano no se cortan; y si $a = 1$ y $b = 5$, entonces la recta está contenida en el plano.

[3]Esto se debe a una errata en el enunciado, donde debería decir «en función de a y b». Podría pensarse que en las cuentas la b podría anularse y, de tal forma, el resultado no dependería de esta. Mas esto no es posible: dos planos de la forma $\pi_1 : ax + y - z = b_1$ y $\pi_2 : ax + y - z = b_2$ con $b_1 \neq b_2$ no tienen ningún punto en común puesto que son paralelos pero no coincidentes; por lo tanto, los puntos de intersección de una recta cualquiera con sendos planos deben ser distintos y, como lo único que cambia en la expresión de los planos es el valor de b, necesariamente el punto de intersección debe depender de b.

Pregunta 4: Análisis (2.5 puntos)

Responda al apartado 4.1 o al apartado 4.2.

4.1 Responda a todos los subapartados siguientes:

Se dan las funciones polinómicas $f(x) = -x^2 + x + 2$ y $g(x) = x^2 - b$, siendo b un parámetro real. Obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) *El valor de b para que uno de los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2+x+2$ e $y = x^2 - b$ sea el punto $P = (-1, 0)$. Un esquema de las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - 1$.*

Que el punto P sea un punto de intersección de $y = -x^2 + x + 2$ e $y = x^2 - b$ significa que dicho punto pertenezca a ambas curvas, es decir, que verifique sus respectivas ecuaciones. Así pues, en primer lugar hemos de comprobar que satisface la primera. En efecto:

$$\begin{aligned}
y &= -x^2 + x + 2 \\
0 &= -(-1)^2 + (-1) + 2 \\
0 &= -1 - 1 + 2 \\
0 &= 0.
\end{aligned}$$

La expresión de la segunda curva depende del parámetro b, de modo que lo que debemos hacer ahora es determinar cuánto ha de ser este parámetro si queremos que el punto P satisfaga la ecuación. Para ello sustituimos el punto en esta:

$$\begin{aligned}
y &= x^2 - b \\
0 &= (-1)^2 - b \\
0 &= 1 - b
\end{aligned}$$

y resolvemos la ecuación $0 = 1 - b$ con respecto a b, determinando que $b = 1$. Hemos comprobado que si y únicamente si $b = 1$ entonces el punto P pertenece a ambas curvas, es decir, es un punto de intersección.

Ahora, para hacer el esquema de las curvas necesitaremos saber la forma aproximada de cada una de ellas y también su posición respecto de la otra:

- $-x^2 + x + 2$ es un polinomio de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a = -1$, $b = 1$ y $c = 2$, de modo que la curva que representa es una parábola. Puesto que $a = -1 < 0$ la parábola es cóncava (su vértice es un máximo relativo). El vértice es el punto (x_v, y_v) cuya coordenada x_v viene dada por
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{2}.$$
Sustituimos ahora x_v en la expresión de la parábola para obtener la coordenada y_v:
$$y_v = -x_v^2 + x_v + 2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{-1 + 2 + 4}{4} = \frac{5}{4}.$$
Además, la parábola tendrá un corte con el eje vertical allí donde $x = 0$. Sustituimos nuevamente en la expresión de la parábola y obtenemos $y = -0^2 + 0 + 2 = 2$; es decir, hay un punto de corte con el eje vertical en el punto $(0, 2)$. Para determinar sus cortes con el eje horizontal habrá que determinar los valores de x donde $y = 0$. Para ello resolvemos la siguiente ecuación:
$$0 = y = -x^2+x+2 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2}.$$

Sus dos soluciones son $x_1 = -1$ y $x_2 = 2$, es decir, hay dos puntos de corte con el eje horizontal que son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

- $x^2 - 1$ es también un polinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$ con $a = 1$, $b = 0$ y $c = -1$, de modo que la curva que representa es una parábola. Puesto que $a = 1 > 0$ la parábola es convexa (su vértice es un mínimo relativo). El vértice puede determinarse como en el caso anterior como el punto (x_v, y_v) tal que

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0 \qquad \text{y} \qquad y_v = x_v^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1.$$

Nuevamente, buscamos la intersección con el eje vertical. Pero ya vemos que en el vértice tenemos $x = 0$, así que ahí estará la intersección. Para determinar sus cortes con el eje horizontal solucionamos de nuevo la ecuación $y = 0$ en función de x:

$$0 = y = -x^2 - 1 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$$

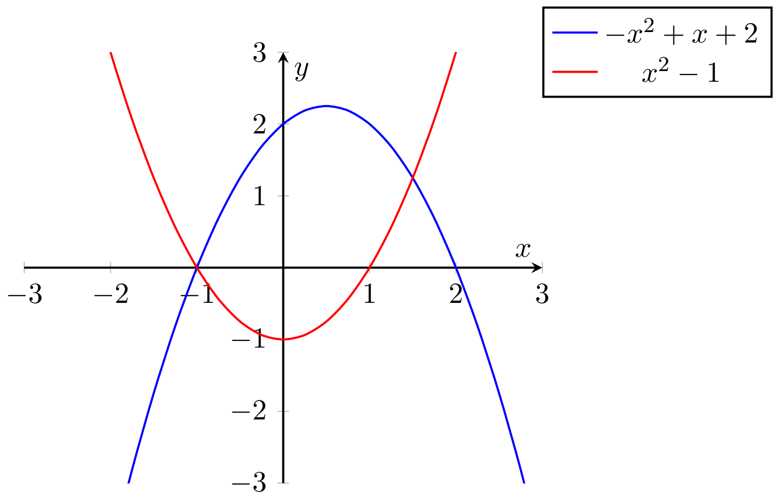
cuyas dos soluciones son $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, es decir, hay dos puntos de corte con el eje horizontal, y son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

- Para determinar su posición relativa deberemos calcular sus puntos de intersección. Podemos fijarnos en que el punto $(-1, 0)$ está en ambas parábolas, como hemos podido ver con los cálculos anteriores. Para calcular el otro, tenemos de nuevo en cuenta que un punto de intersección es aquel que verifica ambas ecuaciones, así que para encontrarlo deberemos igualarlas y resolver

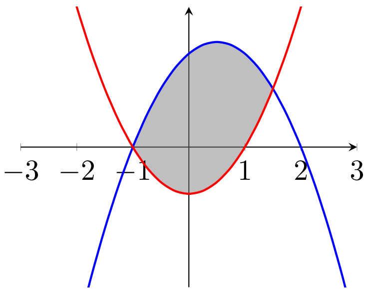
$$-x^2 + x + 2 = x^2 - 1 \Longleftrightarrow 0 = 2x^2 - x - 3 \Longleftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

obteniendo las soluciones $x_1 = -1$ y $x_2 = \frac{3}{2}$. La solución x_1 se corresponde con el punto que hemos visto antes, $(-1, 0)$. La solución x_2 nos da el otro. Para esto, sustituimos x_2 en la ecuación de la parábola $x^2 - 1$, aunque podríamos sustituir también en la otra ya que el punto debe ser el mismo: $y_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5}{4}$. Por lo tanto, el otro punto de intersección será $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$.

Con todo ello el esquema de las curvas es el siguiente:



4.1.2 (1.25 puntos) *El área de la superficie finita encerrada entre las curvas* $y = -x^2 + x + 2$ *e* $y = x^2 - 1$.



A la vista del esquema de la izquierda, la superficie encerrada entre ambas curvas está comprendida entre las abscisas[4] $a = -1$ y $b = \frac{3}{2}$, correspondientes a los puntos de intersección de ambas curvas calculados previamente. Dicha superficie podrá ser calculada mediante la integral definida

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x.$$

En el caso que nos ocupa, la función f está por encima de la función g en todo el tramo $[-1, \frac{3}{2}]$, o dicho formalmente $f(x) > g(x)$ para cada $x \in [-1, \frac{3}{2}]$, lo cual implica que $|f(x) - g(x)| = f(x) - g(x)$ para cada $x \in [-1, \frac{3}{2}]$. Calculamos el valor de esta integral:

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x &= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left[-x^2 + x + 2 - (x^2 - 1)\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left[-2x^2 + x + 3\right] \mathrm{d}x \\
&= \left[-2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{x=-1}^{x=\frac{3}{2}} \\
&= \left(-2 \cdot \frac{3^3}{3 \cdot 2^3} + \frac{3^2}{2 \cdot 2^2} + 3 \cdot \frac{3}{2}\right) - \left(-2 \cdot \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} + 3 \cdot (-1)\right) \\
&= \frac{27}{8} - \left(-\frac{11}{6}\right) \\
&= \frac{125}{24}.
\end{aligned}$$

Tenemos por lo tanto que el área de la supeficie finita encerrada entre $y = -x^2 + x + 2$ y $y = x^2 - 1$ es de $\frac{125}{24}$ unidades cuadradas.

4.2 Responda a todos los subapartados siguientes:

Una ventana Norman está formada por un rectángulo y un semicírculo. El semicírculo está apoyado sobre el lado horizontal superior del rectángulo, que coincide con el diámetro horizontal del semicírculo. La base del rectángulo mide x y su altura mide y, por lo que el diámetro del semicírculo mide x. Obtener:

4.2.1 (1.25 puntos) *La expresión* $S(x)$ *que da el área de una ventana Norman de perímetro* 5 *metros en función de su anchura* x.

El área de una ventana Norman de base x y altura y es la suma del área de un rectángulo de lados x e y, que es xy; y la de un semicírculo de radio $\frac{x}{2}$, que es $\frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$. Podemos expresarla en una función que depende de x y de y:

$$A(x, y) = xy + \frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = xy + \frac{\pi x^2}{8}. \tag{10}$$

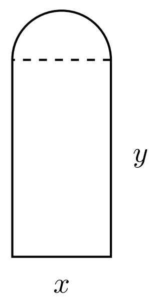


Figura 1: Diagrama de una ventana Norman.

La función que se pide obtener ha de depender únicamente de x, y para ello podemos utilizar el dato extra de que el perímetro es 5 metros. El perímetro de

[4] El término «abscisa» se refiere a valor del eje horizontal.

la ventana es la suma de la longitud de la base inferior, x; de los dos lados verticales, $2y$; y de una semicircunferencia de radio $\frac{x}{2}$, $\frac{2\pi\frac{x}{2}}{2}$; es decir, si el perímetro debe ser 5 metros es necesario que

$$5 = x + 2y + \frac{2\pi \cdot \dfrac{x}{2}}{2} = x + 2y + \frac{\pi x}{2} = \frac{(2+\pi)x}{2} + 2y \tag{11}$$

Si queremos obtener el área únicamente en función de x deberemos sustituir la y que aparece en (10), para lo cual podemos despejar y en (11), obteniendo

$$\begin{aligned} 5 &= \frac{(2+\pi)x}{2} + 2y \\ 5 - \frac{(2+\pi)x}{2} &= 2y \\ \frac{5}{2} - \frac{(2+\pi)x}{4} &= y \\ \frac{10-(2+\pi)x}{4} &= y. \end{aligned}$$

Finalmente, sustituimos esto en la expresión de $A(x,y)$ para obtener la expresión del área en función de x:

$$S(x) = A\left(x, \frac{10-(2+\pi)x}{4}\right) = x\frac{10-(2+\pi)x}{4} + \frac{\pi x^2}{8} = \frac{20x-(4+3\pi)x^2}{8}.$$

4.2.2 (1.25 puntos) *El valor de x para el que la función $S(x)$ tenga un máximo relativo y el valor de dicha área máxima.*

Para este ejercicio podemos dar dos soluciones: una muy rápida pero que puede no servirnos para otros problemas y otra más general pero más lenta. Mostramos aquí las dos:

Rápida: En este problema, la función que buscamos optimizar es un polinomio de segundo grado, $S(x) = \frac{5}{2}x - \frac{4+3\pi}{8}x^2$, que es de la forma ax^2+bx+c donde $a = -\frac{4+3\pi}{8}$, $b = \frac{5}{2}$ y $c = 0$. Como $a < 0$, la parábola es cóncava y su vértice es un máximo relativo. Calculamos la coordenada x del vértice con la fórmula ya conocida:

$$x_{\text{máx}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{5}{4}}{-\frac{4+3\pi}{8}} = \frac{10}{4+3\pi} \approx 0{,}74489.$$

[El símbolo «≈» significa «es aproximadamente igual a».]

Este es el valor de x para el que $S(x)$ alcanza un máximo relativo. Es decir, que una ventana Norman de perímetro 5 metros alcanza su máximo relativo —que de hecho es absoluto— cuando la longitud de su base es de $\frac{10}{4+3\pi}$ metros, que son aproximadamente unos 0,74489 metros.

Evaluamos ahora S en $x_{\text{máx}}$ para obtener el valor máximo de la función:

$$S(x_{\text{máx}}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{4+3\pi} - \frac{4+3\pi}{8}\left(\frac{10}{4+3\pi}\right)^2$$

sacamos factor común $\frac{10}{4+3\pi}$ y queda

$$\begin{aligned} &= \frac{10}{4+3\pi}\left(\frac{5}{2} - \frac{4+3\pi}{8} \cdot \frac{10}{4+3\pi}\right) \\ &= \frac{10}{4+3\pi}\left(\frac{5}{2} - \frac{10}{8}\right) \\ &= \frac{10}{4+3\pi} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{25}{8+6\pi} \\ &\approx 0{,}93111. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor del área máxima de una ventana Norman de perímetro 5 metros es $\frac{25}{8+6\pi}$ metros cuadrados, que son aproximadamente unos 0,93111 metros cuadrados.

El problema de esta manera de solucionar el problema es que solo sirve si $S(x)$ es un polinomio de grado 2. El método general que sí serviría para un conjunto más general de funciones, no solo polinomios de grado 2, es el siguiente.

General: Sabemos que si S tiene un máximo en cierto punto $(x_{\text{máx}}, S(x_{\text{máx}}))$, necesariamente se tiene que

$$S'(x_{\text{máx}}) = 0. \tag{12}$$

Para encontrar los candidatos a máximo relativo deberemos resolver la ecuación anterior. Antes de esto calculamos la derivada:

$$S'(x) = \frac{20 - (4 + 3\pi) \cdot 2x}{8} = \frac{20 - (8 + 6\pi)x}{8}.$$

Resolvemos la ecuación (12):

$$\begin{aligned} S'(x_{\text{máx}}) &= 0 \\ \frac{20 - (8 + 6\pi)x_{\text{máx}}}{8} &= 0 \\ 20 - (8 + 6\pi)x_{\text{máx}} &= 0 \\ x_{\text{máx}} &= \frac{20}{8 + 6\pi} \\ x_{\text{máx}} &= \frac{10}{4 + 3\pi} \\ x_{\text{máx}} &\approx 0,74489. \end{aligned}$$

[El símbolo «≈» significa «es aproximadamente igual a».]

Por lo tanto, el único candidato a máximo relativo es $x_{\text{máx}} = \frac{10}{4+3\pi}$. Para comprobar que, en efecto, lo es, tenemos dos opciones:

Comprobación directa: En esta opción debemos comprobar que $S(x)$ crece conforme los valores de x se acercan a $x_{\text{máx}}$ por la izquierda y decrece en cuanto superamos $x_{\text{máx}}$. En otras palabras, tenemos que ver que para valores de x cercanos[5] a $x_{\text{máx}}$ por la izquierda, es decir $x < x_{\text{máx}}$, se tiene que $S'(x) > 0$ y que para valores de x cercanos a $x_{\text{máx}}$ por la derecha, es decir $x_{\text{máx}} < x$, se tiene que $S'(x) < 0$.

Ahora bien, si nos fijamos en la expresión de $S'(x)$ veremos que es un polinomio de grado 1 —su gráfica es una recta— por lo que cortará al eje horizontal en un solo punto. Esto quiere decir que $S'(x)$ solo cambiará de signo en un punto, concretamente en $x_{\text{máx}}$. Así pues, no tenemos que preocuparnos de que el estudio del signo de la derivada sea para valores de x cercanos a $x_{\text{máx}}$, basta con estudiar el signo a ambos lados sin preocuparnos de si puede haber más cambios de signo. Para ello, tomamos un punto a cada lado de $x_{\text{máx}}$ y vemos qué signo tiene $S'(x)$ ahí.

- A la izquierda de $x_{\text{máx}}$ podemos tomar $x = 0$. En este valor, el valor de la derivada es $S'(0) = \frac{20}{8} > 0$. Así que $S'(x) > 0$ si $x < x_{\text{máx}}$.
- En nuestro caso, como la función sabemos que necesariamente cambia de signo en $x_{\text{máx}}$ y a la izquierda de este es positiva, no nos haría falta comprobar que a la derecha de $x_{\text{máx}}$ es negativa. Sin embargo, como esta situación depende de la función que nos hayan dado y no siempre se dará, realizamos la comprobación con un punto a la derecha de $x_{\text{máx}}$. Tomamos $x = 3$ y vemos que el valor de la derivada es $S'(3) = \frac{20-(8+6\pi)\cdot 3}{8} = \frac{20-24-18\pi}{8} < 0$. Así que $S'(x) < 0$ si $x > x_{\text{máx}}$.

[5] Esta noción de cercanía depende de la función. Pero hay que tener cuidado porque a veces, las funciones cambian de crecientes a decrecientes varias veces a lo largo de su dominio, y si no tenemos cuidado a la hora de seleccionar los valores, podemos llegar a conclusiones equivocadas.

Criterio de la segunda derivada: Alternativamente, al ser $S(x)$ un polinomio, tendrá segunda derivada. Esto nos permite utilizar el criterio de la segunda derivada, el cual afirma que si para un valor x se cumple que $S'(x) = 0$ y $S''(x) < 0$, entonces ese punto es un máximo relativo. Para poder aplicarlo, calculamos primero la segunda derivada:

$$S''(x) = \frac{-(8+6\pi)}{8} < 0,$$

es decir, que la segunda derivada es negativa para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto nos ahorra el paso de verificar si es negativa en $x_{\text{máx}}$ puesto que, si es siempre negativa, está claro que también lo será en $x_{\text{máx}}$. Por lo tanto, se cumple el criterio de la segunda derivada y podemos afirmar que S tiene un máximo relativo en $x_{\text{máx}}$.

En cualquier caso concluimos que el valor de x para el que la función S tiene un máximo relativo es

$$x_{\text{máx}} = \frac{10}{4+3\pi}$$

lo cual se interpreta como que las ventanas Norman de perímetro 5 metros alcanzan su área máxima cuando la base mide $\dfrac{10}{4+3\pi}$ metros, que aproximadamente son 0,74489 metros. Evaluando en dicho punto, obtenemos el valor máximo de S:

$$\begin{aligned} S(x_{\text{máx}}) &= \frac{20 \cdot \frac{10}{4+3\pi} - (4+3\pi)\left(\frac{10}{4+3\pi}\right)^2}{8} \\ &= \frac{10}{4+3\pi} \cdot \frac{20 - (4+3\pi)\frac{10}{4+3\pi}}{8} \\ &= \frac{10}{4+3\pi} \cdot \frac{20-10}{8} \\ &= \frac{10}{4+3\pi} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{25}{8+6\pi} \\ &\approx 0{,}93111. \end{aligned}$$

[El símbolo «≈» significa «es aproximadamente igual a».]

Esto quiere decir que el área máxima que puede alcanzar una ventana Norman de perímetro 5 metros es $\frac{25}{8+6\pi}$ metros cuadrados, que son aproximadamente 0,93111 metros cuadrados.

¡Os deseamos mucha suerte a todos en vuestro examen!

Este documento fue realizado por Sixto José Martínez Gan y Diego Recaj Arbiol, de la Asociación Matemañicos de la Universidad de Zaragoza en mayo de 2025.