CÓNICAS. Problemas con Solución.

1) Halla la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $P(1,0)$ y que es tangente a $y=x+4$.
Solución: $(x-1)^2+y^2=25/2$.

2) Sea la circunferencia $x^2+y^2+2y-3=0$. ¿El punto $P(2,5)$ es interior a la circunferencia? Da dos puntos interiores, otros dos exteriores y otros dos sobre la circunferencia.
Solución: P es exterior a la circunferencia. Ejemplos de puntos interiores $(0,-1)$ y $(0,0)$; de puntos exteriores $(3,0)$ y $(0,-4)$; y de puntos sobre la circunferencia $(0,1)$ y $(0,-3)$.

3) Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3,0),(0,0)$ y $(2,2)$.
Solución: $(x+3/2)^2+(y-7/2)^2=58/2$.

4) Determina el centro y e radio de la circunferencia $4x^2+4y^2+12x-16y+9=0$.
Solución: $(x+3/2)^2+(y-2)^2=4$. Centro $(-3/2,2)$, radio 2.

5) Halla la ecuación de las circunferencias que pasan por el punto $P(3,-2)$ y son tangentes a los ejes coordenados.
Solución: Dos soluciones. $(x-(5+2\sqrt{3}))^2+(y+(5+2\sqrt{3}))^2=(5+2\sqrt{3})^2$;
$(x-(5-2\sqrt{3}))^2+(y+(5-2\sqrt{3}))^2=(5-2\sqrt{3})^2$.

6) Dada la circunferencia $C: x^2+y^2-4x-2y+1=0$, halla las ecuaciones de las rectas tangentes a C en los puntos de corte con el eje de abcisas. Calcula el punto de intersección de las tangentes y el ángulo que forman.
Solución: Tangentes: $y=\sqrt{3}(x-(2+\sqrt{3}))$, $y=-\sqrt{3}(x-(2-\sqrt{3}))$. Intersección $(2,-3)$. Ángulo $\arctan(\sqrt{3}/2)\approx 0.7137\approx 40.89$.

7) Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto $(0,2)$ y cuyos focos son $F(3,0)$ y $F'(-3,0)$. Calcula los semiejes, los vértices y su excentricidad.
Solución: $x^2/13+y^2/4=1$. Semiejes $a=\sqrt{13}$, $b=2$. Vértices $(\pm\sqrt{13},0)$, $(0,\pm2)$. Excentricidad $e=3/\sqrt{13}$.

8) Demuestra que la ecuación $1-300x+300x^2+10y+25y^2=0$ corresponde a una elipse. Halla sus elementos: centro, vértices y focos; y su excentricidad. Representa la elipse.
Solución: Elipse $(x-1/2)^2/(1/2)^2+(y+1/5)^2/(\sqrt{3})^2=1$. Centro $C(1/2,-1/5)$. Vértices $(1/2,-1/5\pm\sqrt{3})$ sobre el eje mayor paralelo a OY. Vértices $(0,-1/5),(1,-1/5)$, sobre el eje menor paralelo a OX. Focos $(1/2,-1/5\pm\sqrt{11}/2)$. Excentricidad $e=\sqrt{11/3}/2\approx 0.957$.

9) Una elipse tiene su centro en el punto $(2,-1)$, se excentricidad es $e=3/5$ y el eje menor es 8 y paralelo al eje OX. Calcula su ecuación, sus vértices y sus focos.
Solución: $(x-2)^2/4^2+(y+1)^2/5^2=1$. Vértices en el eje menor $(4,-1),(-2,-1)$. Vértices en el eje mayor $(2,4),(2,-6)$. Focos $(2,2),(2,-4)$.

10) Halla la ecuación de una elipse de focos $F(2,0)$, $F'(-2,0)$ y excentricidad $e=1/2$.
Solución: $x^2/16+y^2/12=1$.

11) Halla las intersecciones de la elipse $x^2+y^2/4=1$ con la recta de pendiente 1 y ordenada en el origen igual a -1.
Solución: Puntos intersección $(1,0)$ y $(-3/5,-8/5)$.

12) Halla los valores de p para que la recta $y = x + p$ sea tangente a la elipse $x^2/4 + y^2/2 = 1$.
Solución: $p = \pm\sqrt{6}$.

13) Una elipse tiene de ejes 70 mm y 42 mm. Calcula su excentricidad. Si se quiere otra elipse con la misma excentricidad y con eje mayor de 35 mm, ¿cuánto debe medir el eje menor? Demuestra que dado el eje mayor $2a$ y la excentricidad de una elipse e, el eje menor está dado por $b = a\sqrt{1-e^2}$.
Solución: Eje menor $2b = 21$ mm.

14) Dada la elipse de ecuación $x^2/3^2 + y^2/2^2 = 1$, calcula las rectas tangentes a la elipse desde el punto $(4, 1)$.
Solución: Tangentes $t_1 : y - 1 = \frac{1}{7}(4 - \sqrt{37})(x - 4)$, $t_2 : y - 1 = \frac{1}{7}(4 + \sqrt{37})(x - 4)$.

15) Demuestra que la recta tangente a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el punto $P(x_1, y_1)$ de la elipse es $xx_1/a^2 + yy_1/b^2 = 1$. Deduce, aplicando lo anterior, que la ecuación de la recta normal a la elipse en P es

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Solución: Tomar la elipse superior $y = +b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a la curva.

16) Se considera una elipse centrada en el origen y de semiejes $a = 3$ y $b = 2$ en los ejes x e y respectivamente. i) Halla la ecuación, sus focos y excentricidad. ii) En el punto de la elipse de abcisa $x = 1$ y ordenada positiva, calcula la recta tangente y la recta normal.
Solución: Tangente $t : y - 4\sqrt{2}/3 = -1/(3\sqrt{2})(x - 1)$. Normal $n : y - 4\sqrt{2}/3 = 3\sqrt{2}(x - 1)$.

17) Demuestra que el punto de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ más cercano al foco $(c, 0)$ es el vértice $(a, 0)$.
Solución: Sin pérdida de generalidad se puede considerar la elipse $x^2 + y^2/a^2 = 1$, el foco $F(0, c) = F(0, \sqrt{a^2 - 1})$, y el vértice $A(0, a)$. Toma la semielipse superior $y = +a\sqrt{1 - x^2}$ y resuelve como un problema de mínimos.

18) Sea la hipérbola $x^2/4 - y^2 = 1$. Calcula los focos y los vértices. Halla su excentricidad. Obtén sus asíntotas y haz un gráfico.
Solución: Focos $(\pm\sqrt{5}, 0)$, vértices $(\pm 2, 0)$. Excentricidad $e = \sqrt{5}/2$. Asíntotas $y = \pm x/2$.

19) Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $(4, 0)$ y $(-4, 0)$ es igual a 6. ¿De qué cónica se trata?
Solución: Es una hipérbola de ecuación $x^2/3^2 - y^2/(\sqrt{7})^2 = 1$.

20) Halla la ecuación de la hipérbola centrada en el origen que pasa por el punto $(4, 3)$ y tal que la distancia entre sus vértices es 6. Calcula su excentricidad. Halla las asíntotas y dibújala junto con sus asíntotas.
Solución: $x^2/3^2 - y^2/(9/\sqrt{7})^2 = 1$. Excentricidad $e = 4/\sqrt{7}$. Asíntotas $y = \pm(3/\sqrt{7})x$.

21) Halla el centro, vértices, focos y asíntotas de la curva cuya ecuación es $-249 + 400x - 200x^2 + 10y + 25y^2 = 0$. Haz una representación gráfica de la curva junto con las asíntotas y los focos.
Solución: Hipérbola

$$-\frac{(x-1)^2}{(1/2)^2} + \frac{(y + 1/5)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1.$$

Centro $C(1,-1/5)$. Vértices reales $(1,-1/5\pm\sqrt{2})$, vértices imaginarios $(3/2,-1/5),(1/2,-1/5)$. Asíntotas $y-1=\pm 2\sqrt{2}(x-1/5)$. Eje focal paralelo a OY, focos $(1,13/10),(1,-17/10)$.

22) Un barco navega con rumbo paralelo a la costa y a 60 Km de ésta. Dos estaciones emisoras A y B están sobre la línea recta de la costa y separadas 240 Km entre sí. Estas emisoras emiten señales que viajan a una velocidad de 300000 m/s, y el barco recibe la señal de A medio segundo antes que la de B. Halla la posición de localización del barco. (Toma un sistema de referencia adecuado).
Solución: Con origen de coordenadas en el punto medio de A y B, y eje x la recta que pasa por A y B, el barco se encuentra en la hipérbola $x^2/5625-y^2/8775=1$. Sus coordenadas son $x=89.06$ Km, $y=60$ Km.

23) Demuestra que la recta tangente a la hipérbola $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ en el punto $P(x_1,y_1)$ es $xx_1/a^2-yy_1/b^2=1$.
Solución: Derivar implícitamente la ecuación de la hipérbola y operar.

24) Demuestra que en una rama de la hipérbola, el punto más cercano del foco interno es precisamente el vértice.
Solución: Sin pérdida de generalidad se puede considerar los focos $F(1,0),F'(-1,0)$ y la hipérbola $x^2/a^2-y^2/(1-a^2)=1$, $a\in(0,1)$. Se plantea un problema de mínimos.

25) Calcula el foco y la directriz de la parábola $y=x^2$. El punto $P(2,4)$ es de la parábola, ¿cuál es la distancia de P al foco?¿ Y de P a la directriz? Representa la parábola junto con el foco y la directriz. ¿No sorprende que el foco esté tan cerca del origen?
Solución: Foco $F(0,1/4)$; directriz $d: y=-1/4$. Distancia de P al foco es igual a distancia de P a la directriz e igual a $17/4$.

26) Sea la parábola $y^2=-8x$. Calcula el foco y la directriz. Representa estos elementos junto con la parábola. Calcula los puntos de la parábola de abcisa -1 y -2 para representar la parábola.
Solución: Foco $F-2,0)$, directriz $x=2$. Puntos de abcisa -1, $(-1,\pm 2\sqrt{2})$; puntos de abcisa -2, $(-1,\pm 4)$.

27) Halla la ecuación de la parábola de foco $F(2,-1)$ y directriz $y=-3$. Calcula los puntos de la parábola que tienen ordenada -1 y ordenada 1. Ayúdate de estos puntos para representar la parábola.
Solución: Parábola $(x-2)^2=4(y+2)$. $(4,-1)$ y $(0,-1)$ puntos de ordenada -1. $(2\pm\sqrt{12},1)$ puntos de ordenada 1.

28) Halla la ecuación de la parábola de vértice $(3,-1)$, de eje la recta $y+1=0$ y que pasa por el punto $(2,-2)$. Determina su foco y su directriz. Calcula los cortes con los ejes coordenados y haz una representación gráfica.
Solución: Ecuación $(y+1)^2=-(x-3)$. Foco $F(11/4,-1)$, directriz $x=13/4$. Punto $(2,0)$ corte con OX; puntos $(0,-1\pm\sqrt{3})$ cortes con OY.

29) Sea la parábola $3+8x+4y+4y^2=0$. Calcula sus elementos: vértice, foco y directriz. Calcula el punto de corte de la parábola con el eje de abcisas, y halla la distancia de este punto al foco y a la directriz. Halla los puntos de la parábola de ordenada 1 y 2. Utiliza todos estos puntos para representar la parábola.
Solución: Parábola $(y+1/2)^2=-2(x+1/4)$. Vértice $V(-1/4,-1/2)$, foco $F(-3/4,-1/2)$, directriz $d: x=1/4$. Corte con OX, $P(-3/8,0)$; distancia de P al foco igual a distancia de P a la directriz igual a $5/8$. Puntos $(-11/8,1)$ con ordenada 1; Puntos $(-27/8,1)$ con ordenada 2.

30) Se lanza desde el suelo una piedra que por acción de la gravedad describe una parábola. La piedra alcanza una altura de h metros y cae al suelo a una distancia de a metros. Halla la ecuación de la parábola de la trayectoria de la piedra. (Toma un sistema de coordenadas adecuado).
Solución: Con el sistema de referencia de eje x el suelo y vértice de la parábola $V(0,h)$, la ecuación es $x^2 = -\frac{a^2}{4h}(y-h)$.

31) A partir de un espejo plano se construye un espejo parabólico para un observatorio astronómico. Si se quiere que el espejo tenga una distancia focal (distancia foco-vértice) de 25 metros y un diámetro de 6 metros. ¿qué profundidad hubo que ahondar en el espejo plano?
Solución: Profundidad 9 centímetros. Llama la atención que parece poca hondura.

32) Demuestra la propiedad focal de la parábola: Todo rayo que parte del foco, se refleja en la parábola según un rayo que sale paralelo al eje; y viceversa: Todo rayo que entra paralelo al eje de la parábola, incide en la parábola y se refleja en un rayo que pasa por el foco. (Fundamento de las antenas parabólicas).

33) Prueba que el área que encierra una parábola y una paralela a su directriz es dos tercios del área del rectángulo circunscrito.