DERIVADAS. Problemas con Solución.

1) Aplica la definición de derivada como un límite, para calcular $f'(2)$ siendo $f(x) = x^3 + 2x + 2$.
Solución: 1)14.

2) Sea la función $f(x) = 3x/(2x - 1)$, halla la derivada de f en el punto de abcisa -2 usando la definición de derivada.
Solución: 2) $-3/25$.

3) La función $f(x) = 2 - 3x - 2x^2$ representa una parábola. Halla la función derivada usando la definición de derivada. Halla la recta tangente a la parábola en el punto de corte con el semieje positivo de abcisas. Representa conjuntamente la parábola y la tangente. ¿Qué pendiente tiene la tangente?¿En qué punto corta al eje de ordenadas?
Solución:

$$3)f'(x) = -3 - 4x; \quad y = -5x - 5/2; \quad -5; \quad (0, 5/2).$$

4) El vértice de una parábola $y = ax^2 + bx + c$ es el punto más bajo si $a > 0$, parábola cóncava hacia arriba, o el punto más alto si $a < 0$, parábola cóncava hacia abajo. Demuestra que el vértice de la parábola tiene de abcisa $x_0 = -b/(2a)$, punto en que se anula la derivada. ¿Qué coordenadas tiene el vértice?¿Cuál es el eje de simetría de la parábola?
Solución:

$$4)V\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{-b^2}{4a} + c\right); \quad x = \frac{-b}{2a}.$$

5) Halla el vértice de la parábola $y = -x^2/2 + 3x - 1$. ¿Cuál es su eje de simetría? Halla los puntos de corte de la parábola con los ejes coordenados. Observa que los puntos de corte con el eje x son simétricos respecto a la abcisa del vértice.
Solución:

$$5)V(3, 2); \quad x = 3; \quad (3 - \sqrt{6}, 0);\ (3 + \sqrt{6}, 0);\ (0, -1).$$

6) Sea la función $f(x) = x^3 + 2x - 1$. a) Halla la función derivada. b) Halla los puntos en que la recta tangente es horizontal. c) Halla los puntos en que la tangente es paralela a la recta $y = 3x+2$. d) Calcula la recta tangente en el punto de abcisa $1/\sqrt{3}$. e) Representa la cúbica, la tangente y la recta $y = 3x + 2$.
Solución:
6a) $3x^2 + 2$; 6b) no hay; 6c) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, -1 - \frac{7}{3\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -1 + \frac{7}{3\sqrt{3}}\right)$; 6d) $y = 3x - 1 - 2/(3\sqrt{3}))$.

7) Halla la tangente y la normal a la curva $y = (x-2)e^x$ en el punto en que corta al eje x. ¿Qué ángulo forma la tangente con el eje x? ¿Y la normal, qué ángulo forma con el eje x? ¿Qué ángulo forman la normal y la tangente entre sí?
Solución:
7) $t(x) = e^2(x - 2); \quad n(x) = (-x + 2)/e^2; \quad 1.436 \approx 82.29; \quad -0.134 \approx -7.71; \quad \pi/2 = 90;$

8) Sea la cúbica $y = x^3/4 - ax + 1$. a) Halla el valor de a para que la tangente en $x = 2\sqrt{2}$ sea paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. b) Calcula las rectas tangentes a la curva en los puntos en que la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. c) Representa la curva y las tangentes.

Solución: 8a) $a = 7$; b) $t_1(x) = -x + 1 - 8\sqrt{2}$; $t_2(x) = -x + 1 + 8\sqrt{2}$.

9) Sea la función $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$. a) Calcula la derivada en el punto $x_0 = 3$. b) Halla las tasas de variación media de f en los intervalos $[3, 3.1], [3, 3.01]$ y $[3, 3.001]$. c) Halla las tasas de variación media de f en los intervalos $[2.9, 3], [2.99, 3]$ y $[2.999, 3]$. d) ¿Hacia qué tienden estas tasas de variación media conforme el intervalo se hace de menor longitud?
Solución: 9a) -9; 9b) $-9.2, -9.02, -9.002$; 9c) $-8.8, -8.98, -8.998$; 9d) tienden a -9 el valor de la derivada.

10) Se considera la función $f(x) = x^2 \ln x$. a) Obtén la función derivada, y la derivada de f en $x = 1$. b) Halla los cocientes incrementales de f en los intervalos $[1, 1.01], [1, 1.02]$ y $[1, 1.03]$. ¿En cuál de estos intervalos el cociente incremental aproxima mejor a la derivada? ¿por qué?
Solución: a) $f'(x) = x + 2x \ln x$; $f'(1) = 1$; b) $1.01503, 1.03013, 1.0453$; en $[1, 1.01]$, pues es el de menor longitud.

11) Halla las siguientes derivadas simplificando el resultado, (en algunos casos puede ser conveniente operar antes de derivar):

$$a)y = x^7/7 + x^3 - x^2/2 - 2; \quad b)y = x^3(2x^2 - \pi x + \sqrt{2}); \quad c)y = x(x^2 - 1)(3x^3 + 2x + 2);$$

$$d)y = x^{-3} + 3x^{-2} - 2x^{-1}; \quad e)y = (x^{-2} - 3x^{-1})((5/2)x^{-3} - \pi x^{-1}); \quad f)y = (x + 2)/(x + 2).$$

$$g)y = 1/(1 + 1/x); \quad h)(x^3 - 2x^2 + x)/(x^2 + 1); \quad i)y = (x^{-1} + 2)/(x^{-2} + 2);$$

Solución:

$$11,\ a)x(-1 + 3x + x^5);\ b)x^2(3\sqrt{2} - 4\pi x + 10x^2);\ c) - 2 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + 18x^5;$$

$$d)\frac{-3 - 6x + 2x^2}{x^4};\ e)\frac{-25 + 60x + 6\pi x^2 - 12\pi x^3}{2x^6};\ f)\frac{1}{(3 + x)^2};$$

$$g)\frac{1}{(1 + x)^2};\ h)\frac{1 + 4x - 2x^2}{(1 + 2x^2)^2};\ i)\frac{1 + 4x - 2x^2}{(1 + 2x^2)^2};$$

12) Halla las derivadas de las siguientes funciones; Simplifica el resultado:

$$a)y = (2x^2 + 1)^2;\ b)y = (x^3 - 3x + 2)^3;\ c)y = \sqrt{x^2 - 2x};$$

$$d)y = (x + 2)^{1/3};\ e)y = (x^2 - 1)/(\sqrt{x} - 1);\ f)y = (x^2 - 1)/(\sqrt{x} + 2);$$

$$g)y = \sqrt[3]{(x^2 + x - 2)^5};\ h)y = (3x - 1)\sqrt{x^2 + 2};\ i)y = (2x + 1)\sqrt[3]{x - 2};$$

Solución:

$$12,\ a)8x(1 + 2x^2);\ b)9(-1 + x^2)(2 - 3x + x^3)^2;\ c)\frac{x - 1}{\sqrt{(x - 2)x}};$$

$$d)\frac{1}{3(2 + x)^{2/3}};\ e)\frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right);\ f)\frac{1/\sqrt{x} + 8x + 3x^{3/2}}{2(2 + \sqrt{x})^2};$$

$$g)\frac{5}{3}(1 + 2x)(-2 + x + x^2)^{2/3};\ h)\frac{6 - x + 6x^2}{\sqrt{2 + x^2}};\ i)\frac{-11 + 8x}{3(-2 + x)^{2/3}};$$

13) Calcula y simplifica las derivadas de las funciones siguientes:

$$a)y = e^{2x-3};\ b)y = 3^{x^2+3};\ c)y = e^{\sqrt{x^2+1}};$$

$$d)y = (x^2+2x+3)e^{x-2};\ e)y = (x+2)2^{x-2};\ f)y = 7^{x-x^{1/3}};$$

$$g)y = (2a)^{x^2-2x};\ a \in \mathbb{R};\ h)y = \frac{p^{4x}}{x^2+1};\ p \in \mathbb{R};\ i)y = \frac{e^{2x}+1}{2^{ex}+1};$$

Solución:

$$13,\ a)2e^{-3+2x};\ b)3^{3+x^2}x\ln 9;\ c)\frac{xe^{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$d)e^{-2+x}(5+4x+x^2);\ e)2^{-2+x}(1+x\ln 2+\ln 4);\ f)7^{-x^{1/3}+x}\left(1-\frac{1}{3x^{2/3}}\right)\ln 7;$$

$$g)2^{(-1+x)^2}a^{(-2+x)x}(-1+x)\ln 2a;\ h)\frac{2p^{4x}(-x+2(1+x^2)\ln p)}{(1+x^2)^2};\ i)\frac{2(1+2^{ex})e^{2x}-2^{ex}e(1+e^{2x})\ln 2}{(1+2^{ex})^2};$$

14) Deriva las siguientes funciones de tipo logarítmico y simplifica el resultado. (Recuerda las propiedades fundamentales de los logaritmos que pueden facilitar las operaciones):

$$a)y = \ln(x^2-3x);\quad b)y = \log_{10}\sqrt{3x-1};\ c)y = \ln\left(\frac{3x}{2x+5}\right);$$

$$d)y = \log_2\left(\frac{3x}{2x+5}\right);\ e)y = \log_b\left(\frac{2x+1}{x-3}\right);\ b \in \mathbb{R}\ f)y = \ln\sqrt{\frac{3x}{2x+5}};$$

$$g)y = \ln^2\left(\frac{(3x-1)^2}{x-3}\right);\ h)y = \log_{10}(3x^2-1)\ln(x-3);\ i)y = \frac{\ln(x-1)}{\ln(x+1)};$$

Solución:

$$14,\ a)\frac{-3+2x}{(-3+x)x};\ b)\frac{3}{2(-1+3x)\ln(10)};\ c)\frac{5}{5x+2x^2};\ d)\frac{5}{x(x\ln(4)+\ln(32))};$$

$$e)\frac{7}{\ln(b)(3+5x-2x^2)};\ f)-\frac{3}{18-18x+4x^2};\ g)\frac{2(-17+3x)\ln((3x-1)^2/(x-3))}{3-10x+3x^2};$$

$$h)\frac{1}{\ln(10)}\left(\frac{6x\ln(x-3)}{3x^2-1}+\frac{\ln(3x^2-1)}{x-3}\right);\ i)\frac{\ln(x+1)/(x-1)-\ln(x-1)/(x+1)}{\ln^2(1+x)};$$

15) Deriva las funciones trigonométricas siguientes y simplifica el resultado:

$$a)y = \operatorname{sen}(3x-1);\ b)y = \cos^2(2x)+\operatorname{sen}^2(2x);\ c)y = \cos^2(2x)+\operatorname{sen}(2x);$$

$$d)y = \cos^3(3x+\sqrt{x});\ e)y = \cos(2\operatorname{sen}(2x));\ f)y =;\tan(x^2+1)$$

$$g)y = \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{\tan(x+1)};\ h)y = \tan(x/\operatorname{sen}(x));\ i)y = \tan(\tan(1/x));$$

Solución:

$$15,\ a)3\cos(3x-1);\ b)0;\ c)2\cos(2x)(1-2\operatorname{sen}(2x));$$

$$d)-3\cos^2(\sqrt{2x}+3x)\operatorname{sen}(\sqrt{2x}+3x)(3+1/\sqrt{2x});\ e)-4\operatorname{sen}(2\operatorname{sen}(2x))\cos(2x);\ f)2x\sec^2(1+x^2);$$

$g)2x\cos(x^2-1)\cot(x+1)+\operatorname{cosec}^2(x+1)\operatorname{sen}(1-x^2)$; $h)(1-x\cot(x))\operatorname{cosec}(x)\sec^2(x\operatorname{cosec}(x))$;

$$i)-\frac{\sec^2(1/x)\sec^2(\tan(1/x))}{x^2};$$

16) Halla las derivadas de las siguientes funciones trigonométricas inversas, simplificando el resultado:

$$a)y=\operatorname{arc\,sen}(2x-1);\ b)y=\operatorname{arc\,cos}(x/(x+1));\ c)y=\arctan\sqrt{1+x^2};$$

$$d)y=\arctan\frac{1+x}{1-x};\ e)y=\arctan\left(\frac{a\tan x}{b}\right);\ f)y=\operatorname{arc\,cos}(\operatorname{sen}x);$$

$$g)y=\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,cos}x);\ h)y=\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}};\ i)y=\arctan^2(2x);$$

Solución:

$$16,\ a)\frac{1}{\sqrt{x-x^2}};\ b)-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+2x}};\ c)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}(2+x^2)};$$

$$d)\frac{1}{1+x^2};\ e)\frac{ab\sec^2x}{b^2+a^2\tan^2x};\ f)-|\cos x|\sec x;$$

$$g)-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}};\ h)\frac{1}{\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-1}};\ i)\frac{4\arctan(2x)}{1+4x^2};$$

17) Calcula las derivadas de las siguientes funciones, simplificando el resultado:

$$a)y=\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x};\ b)y=\ln(\tan(x/2));\ c)y=\ln(\tan(x/2+\pi/4));$$

$$d)y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2});\ e)y=\arctan(x/2)+\ln\sqrt{x^2-4};\ f)y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2});$$

$$g)y=\ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1};\ h)y=\arctan\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x};\ i)y=\arctan^2(2x);$$

Solución:

$$17,\ a)-2\operatorname{cosec}x;\ b)\operatorname{cosec}x;\ c)\sec x;$$

$$d)\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}};\ e)\frac{-8+4x+2x^2+x^3}{-16+x^4};\ f)\sqrt{x^2-a^2};$$

$$g)-\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)};\ h)\frac{1}{2(1+x^2)};\ i)\frac{4\arctan(2x)}{1+4x^2};$$

18) Calcula las derivadas de las siguientes funciones, simplificando el resultado. (En algunas hay que derivar logarítmicamente, en otras, se recomienda tomar logaritmos que pueden simplificar los cálculos):

$$a)y=(ax)^{bx};\ b)y=\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}};\ c)y=(\operatorname{sen}x)^{\cos x};$$

$$d)y=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt[3]{b^2+x^2}};\ e)y=\frac{\sqrt{a^2+x^2}-x}{\sqrt{a^2+x^2}+x};\ f)y=(\tan x)^{ex};$$

$$g)y=(\sqrt{x})^{2x-1};\ h)y=\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)};\ i)y=x^{x^x};$$

Solución:

$$18,\ a) b(ax)^{bx}(1+\ln(ax));\ b)\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}};\ c)(\operatorname{sen} x)^{\cos x}(\cos x\cot x-\ln(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x);$$

$$d)\frac{x(-2a^2+3b^2+x^2)}{3\sqrt{a^2+x^2}(b^2+x^2)^{4/3}};\ e)\frac{2x-2\sqrt{a^2+x^2}}{a^2+x(x+\sqrt{a^2+x^2})};\ f)e(\ln(\tan x)+x\operatorname{cosec} x\sec x)(\tan x)^{ex};$$

$$g)-\frac{1}{2}x^{x-3/2}(-1+2x+2x\ln x);\ h)\frac{1}{(\cos(x/2)-\operatorname{sen}(x/2))^2};\ i)x^{x^x+x-1}(1+x\ln x+x\ln^2 x);$$

19) Halla las derivadas primera, segunda y tercera de las siguientes funciones, simplifica el resultado:

$$a)y=x^6-3x^2-1;\ b)y=\operatorname{sen}(2x-3);\ c)y=e^{ax};$$

$$d)y=e^{\sqrt{x}};\ e)y=5^{\cos x};\ f)y=\ln\frac{1-x}{1+x};$$

Solución:

$$19,\ a)6x(-1+x^4);\ -6+30x^4;\ 120x^3;\ b)2\cos(2x-3);\ -4\operatorname{sen}(2x-3);\ -8\cos(2x-3);$$

$$c)ae^{ax};\ a^2e^{ax};\ a^2e^{ax};\ d)\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}};\ \frac{e^{\sqrt{x}}(-1+\sqrt{x})}{4x^{3/2}};\ \frac{e^{\sqrt{x}}(3-3\sqrt{x}+x)}{8x^{5/2}};$$

$$e)-5^{\cos x}\cos x\ln 5;\ 5^{\cos x}\ln 5(-\cos x+\ln 5\operatorname{sen}^2 x);\ -5^{\cos x}\operatorname{sen} x\ln 5(-1-3\ln 5\cos x+\ln^2 5\operatorname{sen}^2 x);$$

$$f)\frac{2}{x^2-1};\ -\frac{4x}{(x^2-1)^2};\ \frac{4(1+3x^2}{(x^2-1)^3};$$

20) Se considera la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}(\pi x/2), & x\in[-1,1],\\ -x^2/2+bx+c, & x\in(1,3].\end{cases}$$

Calcula los valores de b y c para que f sea derivable. Representa aproximadamente la función f con estos valores calculados de b y c.
Solución: $20)b=1;\ c=1/2.$

21) Considera la función $f(x)=e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$. a) Calcula p y q para que la derivada de $e^{ax}\big(p\operatorname{sen}(bx)+q\cos(bx)\big)$ sea igual a $f(x)$. b) Toma ahora $g(x)=e^{ax}\cos(bx)$ y halla p y q en la expresión anterior para que la derivada sea igual a $g(x)$.
Solución: $21,\ a)p=a/(a^2+b^2);\ q=-b/(a^2+b^2);\ b)p=b/(a^2+b^2);\ q=a/(a^2+b^2).$

21) Un tramo de carretera recto está representado por la función lineal $f(x)=x/3+1/2$ para $x\le 0$. Dicha carretera se quiere prolongar en $x>0$ por un tramo parabólico $p(x)$ de modo que la carretera pase por el punto $(3,0)$ que representa las coordenadas de una población y además, que la función total sea derivable (la carretera se prolonga con continuidad y sin punto anguloso en $x=0$). Halla la función que describe el tramo parabólico. Representa la carretera total y a la vista del gráfico comprueba que es derivable y que pasa por el punto $(3,0)$.
Solución: $p(x)=-x^2/6+x/3+1/2.$