INTEGRALES INDEFINIDAS. Problemas con Solución.

Nota: En todas las soluciones hay que añadir una **constante** k ya que la primitiva es un conjunto de funciones que se diferencian entre sí por una constante. Tan solo se especifica la constante k en el primer problema, en los demás se sobreentiende pero se omite por brevedad. También, utilizamos la letra c para una constante de integración.

1) Calcula las integrales:

$$a) \int \sqrt{x^3}dx; \quad b) \int \frac{3}{x^3}dx; \quad c) \int (2x^3 + 5\sqrt{x})dx; \quad d) \int x^3(2\sqrt{x} - 3)dx.$$

Solución:

$$1a)\frac{2x^{5/2}}{5} + k;\ 1b) - \frac{3}{2x^2} + k;\ 1c)\frac{10}{3}x^{3/2} + \frac{x^4}{2} + k;\ 1d) - \frac{3}{4}x^4 + \frac{4}{9}x^{9/2} + k.$$

2) Calcula las integrales:

$$a) \int (x^3 + 1)^3 dx; \quad b) \int x(x^2 + 1)^4 dx; \quad c) \int (x + 3)^2(x^2 + 1)dx.$$

Solución:

$$2a)x + \frac{3}{4}x^4 + \frac{3}{7}x^7 + \frac{1}{10}x^{10};\ 2b)\frac{1}{10}(1 + x^2)^5;\ 2c)9x + 3x^2 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5.$$

3) Calcula las integrales:

$$a) \int \frac{1}{(2x - 1)^3}dx; \quad b) \int \frac{x - 2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x}}dx; \quad c) \int \frac{(2 + 3x)^3}{2x}dx.$$

Solución:

$$3a) - \frac{1}{(2x - 1)^2};\ 3b) - \frac{4}{7}x^{7/6} + \frac{1}{5}x^{5/3};\ 3c)\frac{1}{2}\big(9x(4 + 3x + x^2) + 8\ln x\big).$$

4) Calcula las integrales:

$$a) \int \frac{x}{(2 + x^2)^3}dx; \quad b) \int \cos x \operatorname{sen}^2 x dx; \quad c) \int \frac{\ln x}{x}dx.$$

Solución:

$$4a) - \frac{1}{4(2 + x^2)^2};\ 4b)\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x;\ 4c)\frac{1}{2}\ln^2 x.$$

5) Calcula las integrales:

$$a) \int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}dx; \quad b) \int \frac{2\tan x}{\cos^2 x}dx; \quad c) \int 2^{\cos x} \operatorname{sen} x dx.$$

Solución:

$$5a) - \ln(1 + \cos x);\ 5b)\frac{1}{2}\tan^2 x;\ 5c) - \frac{2^{\cos x}}{\ln 2}.$$

6) Calcula las siguientes integrales de modo inmediato o mediante una simple sustitución:

$$a)\int \frac{-2x^3}{1+x^4}dx; \quad b)\int xe^x dx; \quad c)\int x\,\mathrm{sen}\,(x^2-\pi)dx.$$

$$d)\int \frac{x}{1+x^4}dx; \quad e)\int \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}dx; \quad f)\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx.$$

$$g)\int (x^2+x+1)/\sqrt{x}dx; \quad h)\int \frac{x}{\sqrt[3]{6-x^2}}dx; \quad i)\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+2}}dx.$$

Solución:

$$6a)-\frac{1}{2}\ln(1+x^4);\ 6b)\frac{1}{2}e^{x^2};\ 6c)-\frac{1}{2}\cos(x^2-\pi)=\frac{1}{2}\cos(x^2).$$

$$6d)\frac{1}{2}\arctan(x^2);\ 6e)2\,\mathrm{arc\,sen}(x/2);\ 6f)-\sqrt{4-x^2}.$$

$$6g)\frac{2}{315}\sqrt{x}(315+210x+189x^2+90x^3+35x^4);\ 6h)-\frac{3}{4}(6-x^2)^{2/3};\ 6i)2\sqrt{x^2+4x+2}.$$

7) Halla las siguientes integrales mediante cambio de variable o integrando por partes:

$$a)\int \frac{x}{\mathrm{sen}^2(x^2)}dx; \quad b)\int \ln x dx; \quad c)\int x\ln x dx.$$

$$d)\int \ln^2 x dx; \quad e)\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx; \quad f)\int x^2e^x dx.$$

$$g)\int e^{2x}\cos x dx; \quad h)\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx; \quad i)\int \arctan x dx.$$

$$j)\int \frac{1}{x\cos^2(\ln x)}dx; \quad k)\int x\cos x dx; \quad l)\int \frac{\log_{10}^2 x}{x}dx.$$

Solución:

$$7a)-\frac{1}{2}\cot(x^2);\ 7b)x(\ln x-1);\ 7c)\frac{1}{4}x^2(2\ln x-1).$$

$$7d)x(\ln^2 x-2\ln x+2);\ 7e)\arctan(e^x);\ 7f)e^x(2-2x+x^2).$$

$$7g)\frac{1}{5}e^{2x}(2\cos x+\ \mathrm{sen}\,x);\ 7h)\frac{1}{2}\tan^2 x+k=\frac{1}{2\cos^2 x}+c;\ 7i)x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

$$7j)\tan(\ln x);\ 7k)x\,\mathrm{sen}\,x+\cos x;\ 7l)\frac{\ln^3 x}{3\ln^2(10)}.$$

8) Calcula las integrales racionales siguientes:

$$a)\int \frac{x^4-9}{x+2}dx; \quad b)\int \frac{2}{-2+x+x^2}dx; \quad c)\int \frac{2x+1}{x^3-x^2-x+1}dx.$$

$$d)\int \frac{x^3}{(x+2)^3}dx; \quad e)\int \frac{2x+1}{x^3+x}dx; \quad f)\int \frac{x^3}{4x^3+8x^2-x-2}dx.$$

$$g)\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx; \quad h)\int \frac{3x+1}{x^2+2x+3}dx;$$

Solución:

$$8a) -100/3 - 8x + 2x^2 - 2x^3/3 + x^4/4 + 7\ln(2+x);\ 8b)\frac{2}{3}\left(\ln(x-1) - \ln(x+2)\right);$$

$$8c)\frac{1}{4}\left(\ln(x-1) - \ln(x+1) - \frac{6}{x-1}\right);\ 8d)x - \frac{4(5+3x)}{(x+2)^2} - 6\ln(x+2);$$

$$8e)2\arctan(x) + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2);\ 8f)\frac{1}{240}\left(60x - 128\ln(x+2) + 3\ln(2x-1) + 5\ln(2x+1)\right);$$

$$8g)\frac{1}{3}\arctan(x) - \frac{1}{6}\arctan(x/2);\ 8h)\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+3) - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$

9) Halla las siguientes primitivas de funciones trigonométricas:

$$a)\int \operatorname{sen}^3 x dx;\quad b)\int \cos^4(2x)\operatorname{sen}^3(2x)dx;\quad c)\int \frac{\cos^5 x}{\operatorname{sen}^3 x}dx.$$

$$d)\int \tan^3 x dx;\quad e)\int \operatorname{sen}^2 x dx;\quad f)\int \operatorname{sen}^2 x\cos^2 x dx.$$

$$g)\int \frac{\cos^2 x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx;\quad h)\int \frac{1}{1+3\cos x}dx;\quad i)\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx;$$

Solución:

$$9a) -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos(3x);\ 9b) -\frac{1}{10}\cos^5(2x) + \frac{1}{14}\cos^7(2x);$$

$$9c) -\frac{1}{2}\cos^2 x - 2\ln(\operatorname{sen} x) - \frac{1}{2\operatorname{sen}^2 x};\ 9d)\frac{1}{2}\tan^2 x + \ln(\cos x);$$

$$9e)\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x);\ 9f)\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x);\ 9g)\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x) - x;$$

$$9h)\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\left(\sqrt{2}+\tan(x/2)\right) - \ln\left(\sqrt{2}-\tan(x/2)\right)\right)\ 9i)2\tan(x/2) - x$$

10) Halla las siguientes primitivas de funciones irracionales con los cambios que se indican:

$$a)\int \sqrt{r^2-x^2}dx;\quad x = r\operatorname{sen} t;\quad b)\int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}}dx;\quad x = 2\tan t;$$

$$c)\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx;\quad x = 2\sec t; d)\int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}dx;\quad x-1 = 2\operatorname{sen} t;$$

Solución:

$$10a)\frac{1}{2}\left(x\sqrt{r^2-x^2} + r^2\arctan(x/\sqrt{r^2-x^2})\right);\ 10b) -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x};$$

$$10c)\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|;\ 10d)\frac{3}{2}\operatorname{arc\,sen}(x-1) - \frac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2};$$

11) Halla el valor medio de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $[0,\pi]$. Calcula el valor medio de $f(x) = x^2$ en $[0,2]$.
Solución:

$$11)2/\pi;\ 4/4.$$

12) Demuestra que si

$$I_\pi = \int_0^\pi \frac{dx}{\sqrt{5+4\,\mathrm{sen}\, x}}, \quad I_{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+4\,\mathrm{sen}\, x}},$$

entonces, se cumple $\pi/3 \leq I_\pi \leq \pi/\sqrt{5}$, $2\pi/3 \leq I_\pi \leq 2\pi$.

13) La integral $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ no se puede hacer por métodos elementales. Demuestra que $\int_0^1 e^{-x} dx \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx$. Prueba que $1 - 1/e \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$.

14) Calcula el área comprendida entre el eje de abcisas y la parábola $y = 2x - x^2$. Demuestra sin hacer la integral que esa área está entre 0 y 2.
Solución: 14)4/3.

15) Calcula el área entre el eje de abcisas y la hipérbola $y = 1/x$ desde $x = -4$ hasta $x = 1$.
Solución: 15) $\ln 4$.

16) Sea $p > 0$, halla el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 - px$, y las rectas tangentes a dicha parábola en los puntos en que ésta corta al eje OX.
Solución: 16)$p^3/12$.

17) Se consideran las funciones $y = \mathrm{sen}\, x$, $y = \mathrm{sen}\,(2x)$ en el intervalo $I = [0, \pi/2]$. Halla el área encerrada entre estas dos funciones en I.
Solución: 17)1/4.

18) Halla el área encerrada por las funciones $y = x^2$ y $x = y^2$. Calcula el área del primer cuadrante encerrada entre $y = x^n$ y $x = y^n$, n natural.
Solución: 18)1/3; $(n-1)/(n+1)$.

19) Halla el área comprendida entre el eje y y la curva $x = 9 + 2y - y^2$.
Solución: 19)36.

20) Calcula el área entre $y = e^{-x}$ y $y = x + 1$ desde $x = -1$ hasta $x = 1$.
Solución: 20)$e + 1/e - 1 \approx 2.086$.

21) Calcula el área del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^2$, $y = 2 - x$ y $y = 0$.
Solución: 21)5/6.

22) Calcula el área entre $y = \mathrm{sen}\, x$, $y = \cos x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$.
Solución: 22)$2(\sqrt{2} - 1) \approx 0.8284$.

23) Halla el área limitada entre las curvas $y = 2x^2$, $y = x^3 - 3x$.
Solución: 23)71/6.

24) Calcula el área limitada entre $y = \mathrm{sen}\, x$, $y = 1$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$.
Solución: 24)$\pi/2 - 1 \approx 0.57$.

25) Calcula el área entre el eje de abcisas y la función $y = \sqrt{e^x - 1}$ para $x \in [0, 1]$. Prueba sin hacer la integral que el área es menor que 1.32.
Solución: 25)$2(\sqrt{e-1} - \arctan\sqrt{e-1}) \approx 0.78$.

26) Se considera la elipse de semiejes a y b, $x^2/a^2+y^2/b^2=1$. Prueba que el área se puede expresar por la integral

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Resuelve esta integral y demuestra que el área es $A=\pi ab$. ¿Qué ocurre para a=b?
Solución: 26) Si $a=b$, área del círculo πa^2.