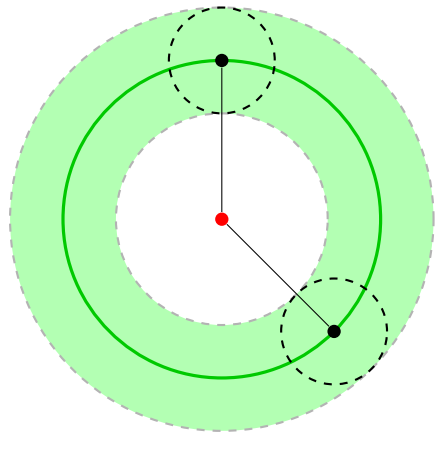
Facultad de Ciencias Universidad Zaragoza

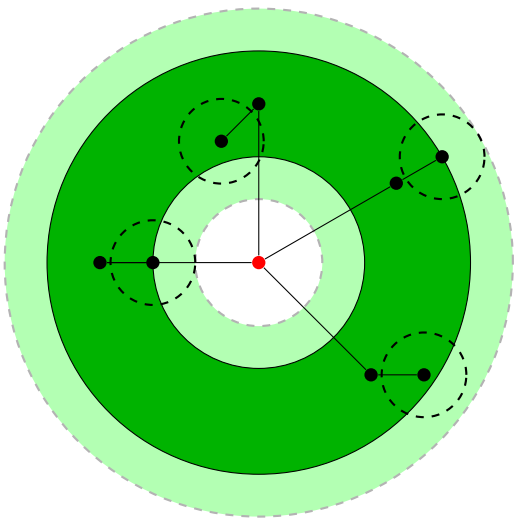
Instituto Universitario de Investigación de Matemáticas y Aplicaciones Universidad Zaragoza

Los problemas de Matemañicos

Solución



Primero de todo, observemos una propiedad fundamental de estos brazos: el primer segmento puede representarse como un vector $s_1 := v_1 - v_0$, el segundo como $s_2 := v_2 - v_1$ y, en general, el i-ésimo segmento como $s_i := v_i - v_{i-1}$; claramente $v_n = v_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i$, pero démonos cuenta de que, como la suma de vectores es conmutativa, el orden en que los sumemos da igual. Así pues, si reordenamos los brazos de forma que ahora los segmentos vienen dados por $s'_i := s_{\sigma(i)}$ donde σ es una permutación de $\{1, 2, \ldots, n\}$ se sigue cumpliendo que $v_n = v_0 + \sum_{i=1}^{n} s'_i$. Por lo tanto, de aquí en adelante asumiremos que los brazos están ordenados de más largo a más corto, es decir, $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n$.



Empecemos con el caso más sencillo, $n = 1$. En este caso el brazo solo está compuesto de un segmento de longitud fija l_1 por lo que la región de alcance será un círculo de radio l_1. Si $n = 2$, el caso ilustrado arriba, entonces tendremos una base v_0, una articulación v_1 y un extremo v_2. La región de alcance de v_1 es la del caso $n = 1$, es decir, un círculo —el de verde oscuro—. Ahora bien, v_2 está ligado a v_1 por un segmento de longitud l_2 por lo que si fijamos v_1, la región de alcance de v_2 es un círculo de radio l_2 y centro v_1 —los círculos discontinuos—. Uniendo todas las regiones que aparecen conforme v_1 recorre su región de alcance nos aparece un anillo de radio interior $l_1 - l_2$ y radio exterior $l_1 + l_2$. Si añadimos un tercer brazo, como se muestra a la izquierda, el argumento es similar: tomamos la unión de todas las regiones de alcance de v_3 conforme v_2 recorre la suya y nos aparece un anillo todavía más grande. En algún momento puede que el radio interior del anillo sea 0; eso significaría que la base puede ser alcanzada por el extremo. En conclusión, la región de alcance siempre es un anillo.

Calculemos ahora los radios exteriores e interiores. El exterior es inmediato: $l_1 + l_2 + \cdots + l_n$. Para el interior, debemos separar dos casos:

- Si $l_1 > l_2 + l_3 + \cdots + l_n$, está claro que la menor distancia a la base que puede alcanzar v_n es $l_1 - (l_2 + l_3 + \cdots + l_n)$.

- Si $l_1 \leq l_2 + l_3 + \cdots + l_n$, definimos $A_i := l_2 + l_3 + \cdots + l_i$ y $B_i := l_{i+1} + l_{i+2} + \cdots + l_n$ para $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$. Aquí, A_i y B_i representan dos agrupaciones de segmentos empezando por el segundo: A_i representa los $i - 1$ primeros y B_i los $n - i$ últimos. Podemos escoger i de forma que A_i y B_i satisfagan $|A_i - B_i| \leq l_1$: tomamos un i cualquiera y, si $|A_i - B_i| > l_1$, podemos incrementar o decrementar i según sea B_i más grande que A_i o viceversa y así conseguir decrementar la diferencia entre ellos, esto estando garantizado ya que $l_i < l_1$ para $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Tenemos por lo tanto que $|A_i - B_i| \leq l_1 \leq A_i + B_i$, que es una condición suficiente para garantizar que existe un triángulo de lados l_1, A_i y B_i, esto queriendo decir que el extremo puede alcanzar la base y que, por tanto, el radio interior es 0.

Sobre este problema: Este resultado está sacado del libro *How to Fold It. The Mathematics of Linkages, Origami and Polyhedra*, de Joseph O'Rourke, Cambridge University Press.

¿Te gustaría participar en Matemañicos? ¿Tienes alguna pregunta sobre el problema? ¿Quieres más Matemáticas curiosas? Visita todo lo que ofrecemos en el QR de la derecha.